



Titre: Modélisation et commande robuste d'hélicoptère
Title:

Auteur: Assen Petrov Tchernev
Author:

Date: 2007

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Tchernev, A. P. (2007). Modélisation et commande robuste d'hélicoptère [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8116/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8116/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** El-Kébir Boukas
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION ET COMMANDE ROBUSTE D'HÉLICOPTÈRE

ASSEN PETROV TCHERNEV
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 2007

© Assen Petrov Tchernev, 2007.



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-36944-9

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-36944-9

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION ET COMMANDE ROBUSTE D'HÉLICOPTÈRE

présenté par: TCHERNEV Assen Petrov

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LAKIS Aouni, Ph.D., président

M. BOUKAS El-Kébir, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BALAZINSKI Marek, Ph.D., membre

DÉDICACE

À mes parents

À ma famille

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette recherche.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur El-Kébir BOUKAS d'avoir accepté de diriger mes travaux de recherche, de m'avoir prodigué des conseils et surtout d'avoir eu la patience et la confiance en moi pour que ce projet trouve cette forme finale.

Je me permets aussi de remercier les membres du jury, Messieurs Aouni LAKIS et Marek BALAZINSKI, qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail en détail.

Je désire finalement exprimer toute ma reconnaissance à mes collègues du département de génie mécanique, section fabrication et design, pour leur soutien, leur esprit d'équipe et leur bonne humeur.

Un remerciement spécial à Monsieur Aurélien RIOU pour les précieux conseils et la révision linguistique.

RÉSUMÉ

Ce mémoire traite de la modélisation et la commande robuste d'hélicoptère. L'obtention d'un modèle mathématique d'hélicoptère avec un rotor principal articulé, basé sur les mouvements de battement et de traînée de la pale dus à une combinaison des charges aérodynamiques, de l'inertie et de la masse de la pale est l'objet de la modélisation. Le modèle du rotor principal permet la modélisation de différentes combinaisons dans l'ordre des articulations et accorde deux décalages entre les charnières. Les forces aérodynamiques sont calculées par la théorie de l'élément de pale. Aucune analyse d'aéroélasticité n'est employée et les pales sont supposées rigides. Les effets de déflexion vers le bas des filets d'écoulement d'air et la vitesse induite sont expliqués par le modèle dynamique de Pitt et Peters. Les conditions d'équilibre et la linéarisation sont décrites et peuvent être appliqués à un sous-ensemble du modèle dans un repère mobile ou fixe. Deux modèles mathématiques d'hélicoptère différents sont utilisés, un pour représenter la dynamique linéaire et l'autre pour la dynamique non linéaire. Le modèle linéaire analytique a été développé à partir d'un modèle non linéaire de la cellule comme un corps rigide, le rotor principal, le rotor de queue et d'un modèle atmosphérique, et tient compte de la dynamique de battement verticale des pales et de la vitesse induite. Le modèle linéaire analytique possède 22 états, dont neuf pour décrire la vitesse linéaire, angulaire et l'attitude de la cellule, neuf pour présenter la dynamique de battement verticale des pales et de la vitesse induite et quatre pour introduire le circuit d'actionnement des commandes. La configuration d'hélicoptère utilisée dans cette recherche est celle du UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky, un giravion de transport, possédant un rotor articulé de quatre pales.

Ce mémoire développe la synthèse de la loi de commande robuste. La synthèse de la commande robuste par l'approche H_{∞} est basée sur la sensibilité mixte ou celle

de "*loop-shaping*", et les développements théoriques récents qui permettent la conception d'un compensateur robuste statique ou dynamique. À cet effet, la formulation du problème H_{∞} est discutée de manière détaillée, différentes procédures pour calculer les compensateurs et/ou pré-compensateurs sont développées, et la fonction coût est modifiée pour inclure des caractéristiques de la matrice de transfert entre les références et les sorties commandées. Quatre contrôleurs de vol ont été conçus pour le modèle linéaire d'hélicoptère UH-60A (Black Hawk) : deux par l'approche H_{∞} basée sur la sensibilité mixte, un par la méthode de "*loop-shaping*" et un par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_{∞} .

ABSTRACT

This memory deals with the modeling and the robust control of helicopter. Obtaining a mathematical model of helicopter system with a single main rotor that includes rigid, hinge restrained rotor blades with flap, and lag, degrees of freedom due to a combination of the aerodynamic, inertia, and mass loads is the object of modeling part. The model allows several hinge sequences and two offsets in the hinges. The aerodynamic loads are calculated by the blade element method. No analysis of aero elasticity is employed and the blades are supposed to be rigid. The download and the inflow follow the Pitt/Peters' dynamic model. Model trim and linearization are described and can be applied to a subset of the model in the rotating or no rotating coordinate frame. Two different mathematical models of helicopter are used one for linear dynamics and other for nonlinear dynamics. The inflow effects are accounted for by using a three state nonlinear dynamic inflow model. The analytical linear model was developed on the nonlinear model including the fuselage rigid body, the main rotor with flapping dynamics, the tail rotor and an atmospheric model. The analytical linear model has 22 states, including nine states of the rigid body, nine states of flapping and inflow dynamics, and four for the swashplate actuator dynamics. The configuration of helicopter used in this research is UH-60A (Black Hawk) of Sikorsky, transport helicopter with four blades articulated rotor.

In this memory, a robust control system design procedure is developed. The design procedure is based on H_{∞} mixed sensitivity formulation or loop-shaping approach, and recent theoretical developments that enable the synthesis of a robust controller with fixed or dynamic structure. To this end, H_{∞} form is discussed, a procedure for computing pre and/or post compensators is developed, and the H_{∞} cost function is modified to include specifications on the transfer matrix from

references to controlled outputs. Fore flight controllers were designed for the linear model of UH-60A (Black Hawk) helicopter: two on H_∞ mixed sensitivity approach, one on loop-shaping method and one on linear quadratic regulator and H_∞ approach.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX.....	xv
LISTE DES FIGURES.....	xvi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xx
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES.....	xxi
LISTE DES ANNEXES.....	xxv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : PROBLÉMATIQUE ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	3
1.1 Introduction.....	3
1.2 Configurations d'hélicoptères	4
1.3 Modes de vol et conditions d'équilibre.....	9
1.4 Interface pilote - hélicoptère	12
1.5 Modélisation de la dynamique du rotor principal	15
1.5.1 Composition d'un rotor.....	15
1.5.2 Mobilités de la pale	19
1.5.3 Modèle d'écoulement d'air à travers le rotor.....	25

1.5.4 Les principales commandes	26
1.5.5 Modèles d'hélicoptères et codes existants	28
1.6 Stratégies de commande d'hélicoptère.....	30
1.6.1 Stratégies de commande par retour linéaire	30
1.6.2 Stratégies de commande par retour d'état non-linéaire.....	32
1.6.3 Stratégies de commande par logique flou	33
1.6.4 Stratégies de commande par système de commutation.....	33
1.6.5 Stratégies de commande par l'approche H_∞	34
1.7 Conclusions sur la recherche bibliographique	35
1.8 Objectifs	36
CHAPITRE 2 : MODÈLE MATHÉMATIQUE.....	38
2.1 Introduction	38
2.2 Incertitudes paramètres du modèle.....	38
2.3 Définition des systèmes de référence	39
2.3.1 Système inertiel	39
2.3.2 Le système "corps", le système "giravion" et le repère du constructeur.....	40
2.3.3 Système de trajectoire de vol	41
2.3.4 Système "moyeu" (en anglais <i>hub</i>)	41
2.3.5 Système "pale articulée"	44
2.4 Les équations du mouvement de l'hélicoptère.....	46
2.4.1 Influence du poids des pales sur la position du centre de gravité du fuselage	46
2.4.2 Équations de translation et de rotation du giravion.....	48

2.5 Les équations du mouvement du rotor principal.....	55
2.5.1 Modèle dynamique de battement et de traînée des pales du rotor dans le repère "moyeu"	55
2.5.2 Les équations de battement des pales dans le repère "moyeu - vent". Modèle aérodynamique équivalent de deuxième ordre.	70
2.5.3 L'équation dynamique de l'extrémité de la pale.....	80
2.5.4 Modèle dynamique de la vitesse induite	85
2.5.5 Calcul des forces et des moments du rotor principal	86
2.6 Modèle du rotor de queue	94
2.7 Modèle atmosphérique	99
2.8 Linéarisation du modèle. Dérivés de stabilité et de commande.....	99
2.9 Les équations d'équilibre	104
2.9.1 Les équations d'équilibre d'un corps rigide.....	107
CHAPITRE 3 : LA SYNTHÈSE DE LA COMMANDE ROBUSTE.....	113
3.1 Introduction	113
3.2 Formulation du problème standard H_∞	113
3.3 Objectifs de performance	115
3.3.1 Rejet des perturbations sur la sortie	118
3.3.2 Rejet des bruits de mesure	119
3.3.3 Poursuite du signal de référence	120
3.3.4 Limitation de l'énergie de la commande.....	121
3.4 Synthèse du compensateur H_∞ par la méthode de sensibilité mixte.....	122
3.4.1 Pondération sur l'erreur (et sur la performance) $W_{e_{mix}}(s)$	123

3.4.2 Pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$	125
3.4.3 Matrice de pondération constante W_{ad}	126
3.5 Synthèse d'un compensateur H_∞ par la méthode de sensibilité mixte pour rejet des perturbations atmosphériques	126
3.5.1 «Faiblesse» du compensateur central.....	128
3.6 Synthèse du compensateur H_∞ par la méthode de "loop-shaping" et factorisation en éléments premiers.....	129
3.6.1 Avantages de la méthode du "loop-shaping"	133
3.7 Synthèse du régulateur statique de retour de sortie par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞	134
3.8 Conclusion	137
CHAPITRE 4 : EXPÉRIMENTATIONS	138
4.1 Introduction.....	138
4.2 Analyse du modèle en boucle ouverte	140
4.3 Performances du compensateur H_∞ par la méthode de sensibilité mixte	142
4.3.1 Choix de la matrice de pondération sur l'erreur $W_{e_{mix}}(s)$	143
4.3.2 Choix de la matrice de pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$	143
4.3.3 Choix de la matrice de pondération constante W_{ad}	144
4.4 Performances du compensateur H_∞ par la méthode de "loop-shaping" et factorisation en élément premiers	151
4.5 Performances du régulateur statique de retour de sortie par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞	154
4.6 Conclusions.....	160

CONCLUSION GÉNÉRALE.....	161
BIBLIOGRAPHIE	163
ANNEXES	237

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 Niveau de complexité du modèle mathématique du rotor [Pad96]..... 24

Tableau 2 Sommaire des variations des paramètres caractéristiques [How81]....41

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky	5
Figure 1.2 Orientation des forces et des couples d'un hélicoptère	6
Figure 1.3 Hélicoptère avec rotors en tandem (<i>Boeing Vertol CH-47 Chinook</i>) et côte à côte <i>Mil Mi-12 (V-12)</i>	7
Figure 1.4 Hélicoptère avec rotors engrenant (<i>Kaman HH-43</i>)	7
Figure 1.5 Hélicoptère aux rotors coaxiaux (<i>Kamov Ka-25</i>)	8
Figure 1.6 Modèle de convertible à demi-aile basculante ERICA d'Agusta	8
Figure 1.7 Principaux modes de vol	9
Figure 1.8 Échelle de Cooper et Harper pour évaluer la maniabilité [CH69]	14
Figure 1.9 Le deuxième principe de Newton et la création de la portance [Wat04]	17
Figure 1.10 Distribution de la vitesse périphérique lors d'un vol stationnaire	18
Figure 1.11 Distribution de la vitesse périphérique lors d'un vol en palier	19
Figure 1.12 Mobilités de la pale	20
Figure 1.13 Battement verticaux des pales [Met03]	21
Figure 1.14 La portance pour une section de la pale en fonction de l'azimut (ψ_M) et de l'ordre du développement en série de Fourier (a) de second ordre; (b) de troisième ordre [Wat04]	21
Figure 1.15 (a) Plateau cyclique et commandes du rotor principal [Pad96]	27
Figure 1.15 (b) Plateau cyclique et commandes du rotor principal articulé [Joh80]	28

Figure 2.1 Inclinaison du repère "moyeu" (\mathcal{H}) par rapport au repère "corps" (\mathcal{B})	42
Figure 2.2 Orientation entre repères dans le système "moyeu"	43
Figure 2.3 Orientation des repères fixes, mobiles et "moyeu - vent"	44
Figure 2.4 δ_3 articulations	45
Figure 2.5 Position de certains points dans le repère du constructeur	47
Figure 2.6 Définition des forces et des couples	51
Figure 2.7 Schéma bloc de l'aérodynamique des pales [Pad96]	56
Figure 2.8 Définition des repères "traînée", "battement" et "pas cyclique" pour un rotor articulé	57
Figure 2.9 Définition de la portance et de la traînée d'un élément de pale dans des repères locales	68
Figure 2.10 Modèle équivalent du rotor avec ressort	73
Figure 2.11 Modèle du disque de rotor avec coordonnées unies [Pad96]	77
Figure 2.12 Modèle dynamique de la vitesse induite	85
Figure 2.13 Orientation du rotor de queue (UH – 60 de Sikorsky)	95
Figure 2.14 Lieu de Bode de l'actionnement du plateau cyclique	101
Figure 2.15 Interface schématisé de découplage statique [JC91]	102
Figure 2.16 Conditions principales de vol d'équilibre [Pad96]	106
Figure 2.17 Définition de l'angle d'incidence et l'angle de glissade	107
Figure 3.1 Schéma du problème H_∞ standard	114
Figure 3.2 Structure de la boucle de régulation	117

Figure 3.3 Structure de la boucle de poursuite pour le problème de sensibilité mixte avec sorties et entrées additionnelles	122
Figure 3.4 Lieu de Bode pour les fonctions de pondération $\text{inv}(W_{e_{mix}}(s))$	124
Figure 3.5 Lieu de Bode pour les fonctions de pondération $W_{u_{mix}}(s)$	126
Figure 3.6 Structure du système en boucle ouverte pour le problème de la sensibilité mixte avec perturbations atmosphériques	127
Figure 3.7 Structure de la boucle de régulation pour le problème de la commande robuste par la méthode de "loop-shaping"	129
Figure 3.8 Structure du modèle incertain avec factorisation en éléments premiers	131
Figure 3.9 Structure de la boucle de régulation pour le problème de la commande robuste par la méthode de "loop-shaping" avec pré-compensateur	132
Figure 4.1 Positionnement des pôles du modèle nominal en boucle ouverte	141
Figure 4.2 Valeurs singulières du modèle nominal en boucle ouverte	142
Figure 4.3 Valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{mix} et pondérations $(W_{e_{mix}}(s)W_{ad})^{-1}$	145
Figure 4.4 Valeurs singulières de la matrice $K_{mix} S_{mix} W_{ad}$ et pondérations $W_{u_{mix}}^{-1}$	146
Figure 4.5 Valeurs singulières de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{mix}	147
Figure 4.6 Rejet de perturbations atmosphériques avec un compensateur H_ω conçu par la méthode de sensibilité mixte	149

Figure 4.7 Réponse en boucle fermée à (un échelon) une entrée de commande collective du pilote de 5" pour un système asservi avec un compensateur H_{∞} , conçu par la méthode de sensibilité mixte	150
Figure 4.8 Valeurs singulières du système pondéré en boucle ouverte	152
Figure 4.9 Valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{LS} et de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{LS}	153
Figure 4.10 Valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{LQ} et de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{LQ}	156
Figure 4.11 Réponse en boucle fermée à (un échelon) une entrée de commande collective de 5" du pilote pour un système asservi avec un compensateur, conçu par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_{∞}	158
Figure C.1 Analyse de la stabilité pour la boucle ouverte $L(s) = G(s)\Delta(s)$	184
Figure C.2 Structure du compensateur central (avec observateur et retour d'état)	189
Figure C.3 Le cas $D_{22} \neq 0_{p_2 \times m_2}$	191

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ACT	<i>Active Control Technology</i>
ADS	<i>Aeronautical Design Standard</i>
AGARD	<i>Advisory Group for Aeronautical Research and Development</i>
BL	<i>Buttline</i>
COMRAD	<i>Comprehensive Analytical Model of Rotorcraft Aerodynamics and Dynamics</i>
DERA	<i>Defence Evaluation and Research Agency</i>
GENHEL	<i>GENeral HELicopter</i>
ILS	<i>Instrument Landing System</i>
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i>
LOES	<i>Low Order Equivalent System</i>
LTI	<i>Linear Time-Invariant system</i>
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
NED	<i>North-East-Down</i>
PIO	<i>Pilot-Induced Oscillations</i>
PI	<i>Performance Index</i>
PVTOL	<i>Planar Vertical Take Off and Landing</i>
RHP	<i>plan complexe droit</i>
RUAV	<i>Rotorcraft Unmanned Aerial Vehicles</i>
SCAS	<i>Stability-and-Control Augmentation System</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
STA	<i>fuselage station</i>
VHF	<i>radiophare omnidirectionnel</i>
VTOL	<i>Vertical Take-Off and Landing</i>
WL	<i>Waterline</i>

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Un vecteur est dénoté avec une flèche au-dessus (par exemple le vecteur de position \vec{r}_{ab}), un vecteur colonne, ou n'importe quel autre type de matrice colonne, est représenté par une lettre minuscule soulignée (par exemple \underline{v}). Les points spécifiques du système sont indiqués par des lettres minuscules, ainsi l'étiquette du vecteur de position dans l'exemple ci-dessus est lue "le vecteur de position du point b par rapport au point a ". Dans le développement des équations du mouvement on a besoin de systèmes de référence. Pour chaque système on a associé à l'origine un trièdre direct (en anglais *right-handed frame axes*). Les trièdres sont indiqués par des minuscules (par exemple \vec{i}_A est le vecteur unité sur l'axe x dans le repère (A)). La transformation angulaire entre deux repères est dénotée par $\text{Rot}_{I \leftarrow B}$, lu comme "la matrice de rotation du repère (B) par rapport au repère (I) ". Les vecteurs de la vitesse de rotation sont représentés par la notation $\vec{\omega}_{B/I}$, lu comme "le vecteur de la vitesse de rotation relative du repère (B) par rapport au repère (I) ". Les vecteurs de rotation relative sont toujours résolus dans le repère du premier indice inférieur. Lorsqu'ils sont projetés dans un troisième repère, les vecteurs portent un indice désignant le système de référence. Les quantités non dimensionnelles (normalisées) sont représentées avec une lettre surlignée. Les fonctions transcendantes de sinus et de cosinus sont abrégées par S_Θ et C_Θ , où l'indice inférieur est l'argument. Les exemples suivants complètent cette introduction sur les notations.

$\vec{r}^{(B)}$ projection orthogonale du vecteur \vec{r} sur les axes d'un repère (B)

$$[\vec{r}^{(B)}] \quad \text{forme spéciale} \quad [\vec{r}^{(B)}] = \begin{bmatrix} 0 & -r_z^{(B)} & r_y^{(B)} \\ r_z^{(B)} & 0 & -r_x^{(B)} \\ -r_y^{(B)} & r_x^{(B)} & 0 \end{bmatrix}$$

$\dot{\vec{r}}$ dérivée d'un vecteur par rapport au temps

\vec{r}' dérivée d'un vecteur par rapport aux composants du repère de référence

$\frac{\dot{\vec{r}}}{r}$ dérivée normalisée par rapport au temps

SYMBOLES

α angle d'incidence, ou angle d'attaque [rad]

β (avec indice) angle de dérapage, (sans indice) angle de battement vertical des pales [rad]

$\tilde{\beta} = [a_0 \quad a_{lw} \quad b_{lw}]^T$ variables du modèle dynamique de battement [rad]

γ_{Lock} nombre de Lock

$\delta(.)$ déplacement virtuel

ε décalage normalisé

ς angle de battement de traînée [rad]

η déplacements des leviers du pilote

θ angle de pas [rad]

$\theta_c = -A_{lw}$ angle de pas cyclique latéral [rad]

$\theta_s = -B_{lw}$ angle de pas cyclique longitudinal [rad]

Θ angle d'assiette [rad]

χ angle du sillage [rad]

ν vitesse induite [pi s^{-1}]

μ taux d'avancement

$\lambda = [\lambda_v \quad \lambda_y \quad \lambda_c]^T$	variables normalisées du modèle dynamique de la vitesse induite
ρ	masse volumique de l'air $[\text{slug pi}^{-3}]$
σ	valeur singulière
Φ	angle de gîte $[\text{rad}]$
ψ	angle d'azimuth $[\text{rad}]$
$\vec{\omega}$	vecteur de la vitesse de rotation $[\text{rad s}^{-1}]$
a	gradient de la portance
b_N, b_S	nombre des pales, nombre des sections
c	corde aérodynamique moyenne $[\text{pi}]$
C_L, C_D	coefficient de poussée, coefficient de traînée
C_T, C_L, C_M	coefficient de sustentation, coefficient du moment de roulis, coefficient du moment de tangage
\mathbb{D}, \mathbb{K}	matrice d'amortissement aérodynamique $[\text{lb rad}^{-1} \text{ s}]$, matrice de raideur aérodynamique $[\text{lb rad}^{-1}]$
e	erreur
E_K, E_P, E_D	énergie cinétique, potentielle, de dissipation $[\text{J}]$
\vec{F}	vecteur des forces aérodynamiques $[\text{lb}]$
\vec{G}	vecteur du poids $[\text{lb}]$
$\vec{H}, (\vec{h})$	moment angulaire absolu, (relatif) $[\text{slug pi}^2 \text{ rad s}^{-2}]$
$[H \quad Y \quad T]^T$	composants de la force aérodynamique $[\text{lb}]$
J	matrice d'inertie $[\text{slug pi}^2]$
J_{xx}	moment d'inertie en roulis $[\text{slug pi}^2]$

J_{yy}	moment d'inertie en tangage $[\text{slug pi}^2]$
J_{zz}	moment d'inertie en lacet $[\text{slug pi}^2]$
J_{xz}	produit d'inertie $[\text{slug pi}^2]$
K_β, K_ζ	constante de raideur du ressort en battement, en traînée $[\text{lb rad}^{-1}]$
$[l \ b \ h]^T$	position de l'origine d'un repère $[\text{pi}]$
L	moment en roulis $[\text{lb pi}]$
$\Delta L, \Delta D$	force élémentaire de poussée, force élémentaire de traînée $[\text{lb}]$
m	masse $[\text{lb}]$
\vec{M}	vecteur des couples aérodynamiques $[\text{lb pi}]$
M	moment en tangage $[\text{lb pi}]$
N	moment en lacet, ou rotor couple $[\text{lb pi}]$
\vec{V}	vecteur de la vitesse linéaire $[\text{pi s}^{-1}]$
P	vitesse de rotation en roulis $[\text{rad s}^{-1}]$
q_w	pression dynamique $[\text{Pa}]$
Q	vitesse de rotation en tangage $[\text{rad s}^{-1}]$
R	vitesse de rotation en lacet $[\text{rad s}^{-1}]$
r_M, r_T	rayon du rotor principal, rayon du rotor de queue $[\text{pi}]$
Q_β, Q_ζ	force généralisée de battement, force généralisée de traînée $[\text{lb}]$
$[U, V, W]^T$	vitesse linéaires de l'origine d'un repère $[\text{pi s}^{-1}]$
$[u_\perp, u_\uparrow, u_\parallel]^T$	vitesse locale $[\text{pi s}^{-1}]$
W	travail virtuel total $[\text{J}]$

LISTE DES ANNEXES

Annexe A : DÉFINITIONS	172
Annexe B : CALCUL DES NORMES H_2 et H_∞	180
Annexe C : RÉOLUTION DU PROBLÈME H_∞	183
Annexe D : SCRIPTS	198

INTRODUCTION

Les travaux présentés dans ce mémoire sont axés sur l'assistance au pilotage, la modélisation et la commande robuste d'hélicoptère. Le système étudié est l'hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky pour un mode de vol au voisinage du vol stationnaire.

Étant un système aérodynamique très complexe et instable, présentant un couplage important entre les variables dans le plan longitudinal et le plan latéral, le pilotage d'hélicoptère est une tâche difficile, voire impossible en absence de système de stabilité. Dans ce contexte, le but principal de la recherche présentée dans ce mémoire est de montrer l'application de différentes stratégies de commande robuste, selon l'information sur le type des incertitudes et des perturbations et que ces méthodes nous ont permis de garantir la stabilité du système étudié avec une marge de stabilité pour toutes incertitudes admissibles, entre autre, d'assurer certaine flexibilité entre performance et robustesse.

Le premier pas pour atteindre le but d'une commande d'hélicoptère concerne l'obtention d'un modèle du système qui implique la connaissance de plusieurs aspects liés à son comportement tels que la dynamique des rotors, des stabilisateurs, ainsi que certains phénomènes physiques et aérodynamiques tels que les effets des tourbillons, la distribution non uniforme de la vitesse induite, le décrochage et la perte de portance qui, pour les objectifs de cette recherche, ne sont pas considérés dans ce travail. Il est difficile d'obtenir avec une grande précision les équations de mouvement d'un hélicoptère car il s'agit d'un système ayant un nombre de degrés de liberté important, qui évolue dans un milieu très perturbé. Au niveau théorique, les difficultés principales de conception de la loi de commande pour les hélicoptères ont leur origine dans les non linéarités et les couplages, et dans le fait que les entrées ne sont ni des forces ni des

couples, mais des déplacements de certains éléments qui entraînent la dynamique de vol à travers l'aérodynamique et les mobilités des pales des rotors.

Ce mémoire s'articule autour de 4 chapitres :

- Le chapitre 1 introduit la problématique de la recherche et est une revue de littérature, positionnant la commande robuste parmi les différentes approches pour la synthèse de la loi de commande d'hélicoptère.
- Sous certaines hypothèses, dans le chapitre 2 est développé le modèle mathématique d'hélicoptère avec un rotor principal articulé, basé sur les mouvements de battement, de traînée de la pale et de la dynamique de la vitesse induite. Les pales sont supposées rigides. Pour un cas général de vol en 3 dimensions, les expressions des forces et les couples aérodynamiques du rotor principal et du rotor de queue sont calculées par la théorie de l'élément de pale. Finalement, le modèle est linéarisé autour d'un point de fonctionnement pour obtenir une représentation du système dans l'espace d'état.
- Le chapitre 3 met en application la théorie de la synthèse de la commande robuste par l'approche H_{∞} , ainsi que la régulation par l'approche linéaire quadratique pour obtenir une loi de commande d'hélicoptère.
- Pour les différentes stratégies de commande étudiées, le chapitre 4 présente les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel, puis les réponses temporelles du système bouclé à différentes entrées caractéristiques. À la fin une comparaison entre les différents compensateurs utilisés est faite.

La conclusion expose les contributions du mémoire à l'avancement des connaissances et à l'application de la commande robuste pour la synthèse de la loi de commande d'hélicoptère. Elle introduit également les perspectives et les nouvelles voies de recherche qui découlent de cette étude.

CHAPITRE 1 : PROBLÉMATIQUE ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'introduire la problématique de ma recherche tout en définissant la gamme de sous thèmes et concepts de base qui forment l'ensemble de l'hélicoptère. La recherche bibliographique est présentée en deux parties : celle qui concerne la modélisation d'hélicoptère suivie de la stabilisation et de la commande robuste d'hélicoptère. Avant d'aborder la modélisation et la commande d'hélicoptère, nous voulons introduire quatre volets substantiels pour le développement de la dynamique de vol. Ceux-ci sont résumés par :

- **La configuration d'hélicoptère;**
- **La mission et l'enveloppe opérationnelle de vol;**
- **La dynamique et les modes de vol;**
- **L'interface hélicoptère – pilote.**

Les hélicoptères sont conçus pour décoller et atterrir sur une très courte distance ou de façons verticales et constituent une classe spécifique de «VTOL» (*Vertical Take-Off and Landing*). Cependant, les hélicoptères sont des giravions, dont la sustentation, la propulsion et la commande de l'attitude sont le résultat de l'action du rotor principal, formé d'un moyeu central, solidaire d'un arbre tournant et de pales, entraînées en rotation par ce moyeu. Ainsi les forces et les moments nécessaires pour générer la position, l'attitude et la vitesse de l'aéronef dans l'espace 3D sont produits par un seul dispositif (rotor principal en coordination avec le rotor de queue) au lieu d'être créés par une aile fixe et par un propulseur séparé. La figure 1.1 montre l'aspect extérieur d'un hélicoptère UH-60A, ainsi que certains composants et systèmes spécifiques choisis par

le constructeur. Le rotor principal est actionné par un moteur à pistons ou un turbomoteur. Pour une puissance, exigée du moteur, supérieure à 400–500 [kW], le turbomoteur est préféré à cause du meilleur rapport puissance/poids. Par contre, le moteur à pistons possède un meilleur rendement énergétique [Wat04]. En tant que système mécanique, opérant dans des conditions météorologiques variées (enveloppe opérationnelle de vol), l'hélicoptère doit travailler suivant le cahier des charges de son utilisateur (pilote), définissant un ensemble de vitesse relative à la vitesse de l'air, d'altitude, du taux de montée ou de descente, de l'angle latéral de translation, du taux de rotation, du facteur de sustentation, ainsi que plusieurs paramètres limitant l'évolution du système [Pad96]. Cependant il existe un cahier des charges (mission), définie à l'avance comme un ensemble de manœuvres dans l'enveloppe opérationnelle de vol, c'est-à-dire une évolution du système suivant certaines spécifications, agissant de manière automatique aux perturbations externes. Les concepts de mission, de manœuvre, de mode de vol, d'enveloppe de vol, ainsi que les spécifications d'AGARD (*Advisory Group for Aeronautical Research and Development*), de MIL, d'ADS (*Aeronautical Design Standard*) sur les caractéristiques (paramètres) de vol et la commande de vol d'hélicoptère (en principe, militaire) sont définis dans quelques articles de confiance plus ou moins accrue (ex. ADS-33E-PRF *Aeronautical Design Standard Performance Specification, Handling Qualities Requirements for Military Rotorcraft*, United States Army Aviation and Missile Command, 2000; MIL-F9490D *General Specification for Flight Control Systems - Design Installation and Test of Piloted Aircraft*, United States Air Force, 1975; etc.).

1.2 Configurations d'hélicoptères

Les rotors sur un hélicoptère peuvent être configurés de plusieurs manières. La configuration la plus usuelle est la combinaison d'un rotor principal et d'un rotor de queue (figure 1.1).

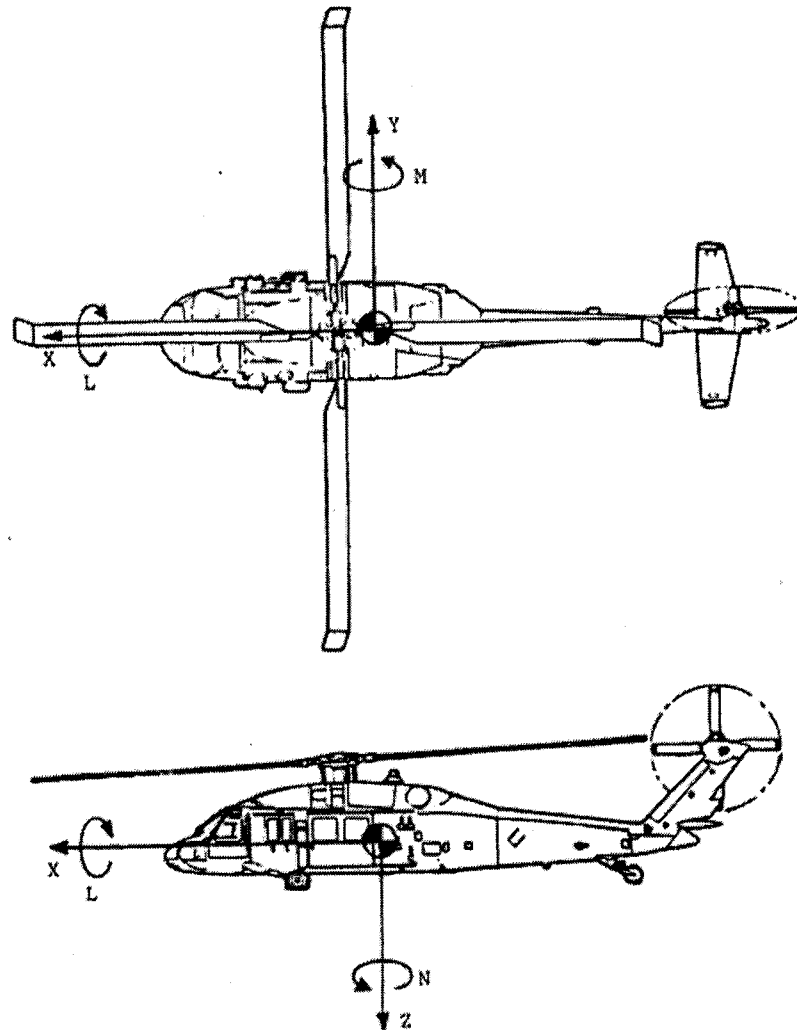


Figure 1.1 Hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky

Étant donné que l'hélicoptère présente un système fermé, la conservation du moment cinétique sur l'axe du rotor principale se traduit par une réaction de la cellule au sens opposé à la rotation des pales ([figure 1.2](#)). Pour annuler cette réaction ou pour orienter l'hélicoptère sur l'axe de lacet, le rotor de queue génère une poussée nécessaire.

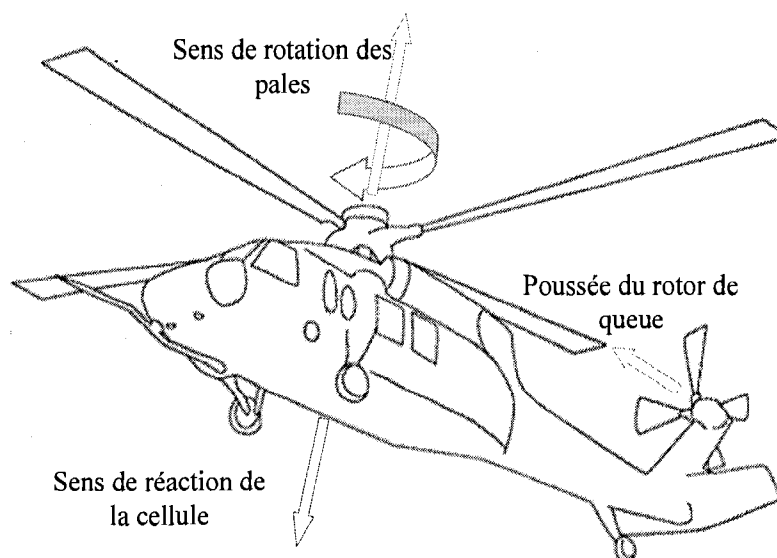


Figure 1.2 Orientation des forces et des couples d'un hélicoptère

Le rotor principal des hélicoptères produits aux États-Unis, au Canada et en Angleterre tourne dans le sens antihoraire (vue du haut), tandis que ceux en France, en Allemagne et en Russie tourne dans le sens horaire. Cette particularité influence la notion de la pale avançant et reculant, ainsi que l'orientation des couples gyroscopiques.

La configuration de rotors en tandem (longitudinale ou côte à côte) est utilisée principalement avec les hélicoptères de transport ([figure 1.3](#)). En raison de la rotation opposée, le moment cinétique de chaque rotor transmis à la cellule est neutralisé. La construction du système de commande est beaucoup plus compliquée, comparée à celle de l'hélicoptère composé d'un rotor principal et d'un rotor de queue. La configuration de rotors côte à côte n'a jamais été très populaire. Cette conception a été choisie pour le plus grand hélicoptère jamais construit - le Mil Mi-12 (V-12). Les hélicoptères de Frank Piasecki (commercialisés par Boeing Vertol) utilisent également les rotors en tandem longitudinal. Normalement, il existe un recouvrement significatif des écoulements, produits par les rotors en tandem, causant une perte de puissance de 8-10% [[www01](#)].

La grandeur de cette perte est similaire à la puissance nécessaire, développée par le rotor de queue, pour équilibrer la réaction de la cellule.

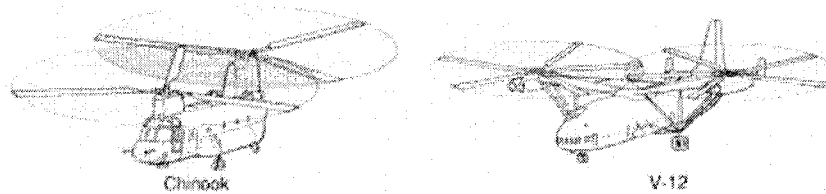


Figure 1.3 Hélicoptère avec rotors en tandem (*Boeing Vertol CH-47 Chinook*) et côte à côte *Mil Mi-12 (V-12)*

L'hélicoptère aux rotors engrenant (en anglais *synchropter*) est un système avec deux rotors (figure 1.4) qui engrènent l'un dans l'autre, tout comme une roue dentée. Comme l'hélicoptère avec rotors en tandem, cette configuration n'a pas besoin d'un rotor anti-couple. Ce système a été développé au début de la giravation, mais est tombé dans la désuétude.

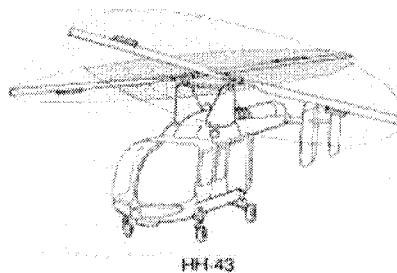


Figure 1.4 Hélicoptère avec rotors engrenant (*Kaman HH-43*)

La dernière configuration (figure 1.5) est l'hélicoptère aux rotors coaxiaux. Les deux rotors tournent dans des directions opposées. Selon le rotor qui produit le plus de portance, l'hélicoptère tournera à gauche ou à droite, en raison du couple des résultantes aérodynamiques par rapport au centre de masse du giravion. Les hélicoptères avec cette configuration ne peuvent pas atteindre une vitesse de croisière élevée, parce que la force de traînée est trop grande. Cette configuration a été choisie principalement par le constructeur russe Kamov.

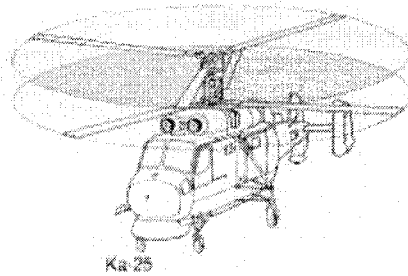


Figure 1.5 Hélicoptère aux rotors coaxiaux (*Kamov Ka-25*)

L'Aéronautique est un ensemble de connaissances, essentiellement divisée en deux branches : l'Aviation et la Giraviation. Toutes deux utilisent pour la sustentation des engins volants, dont la résultante aérodynamique est appliquée sur une surface profilée, convenablement disposée et inclinée, appelée voilure. Il existe un appareil qui combine les surfaces sustentateurs d'un avion à aile fixe et de la voilure tournante de l'hélicoptère. Un modèle de convertible (en anglais *tilt rotor*) (PVTOL ou *Planar Vertical Take Off and Landing*) est montré à la [figure 1.6](#). Le rotor est d'abord placé au-dessus de l'appareil, comme dans un hélicoptère, pour assurer le décollage et le vol à basse vitesse. Puis il bascule de 90° pour devenir un propulseur permettant de voler jusqu'à $500-600 \text{ [Km/h]}$. Cette conversion du rotor ne s'effectue que lorsque les ailes, aux extrémités desquelles sont installés les rotors, sont capables de créer une portance égale au poids de l'appareil.

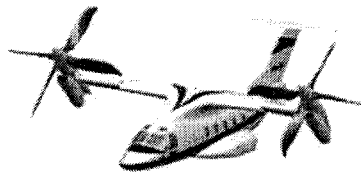


Figure 1.6 Modèle de convertible à demi-aile basculante ERICA d'Agusta

Note : Pour tout ce qui suit, c'est la configuration de la [figure 1.1](#) qui sera considérée.

1.3 Modes de vol et conditions d'équilibre

Il est convenable de décrire les tâches de vol dans une hiérarchie suivante : une mission est composée d'une série de manœuvres; les manœuvres sont normalement accomplies par différents modes de vol. Les principaux modes de vol sont résumés à la [figure 1.7](#).

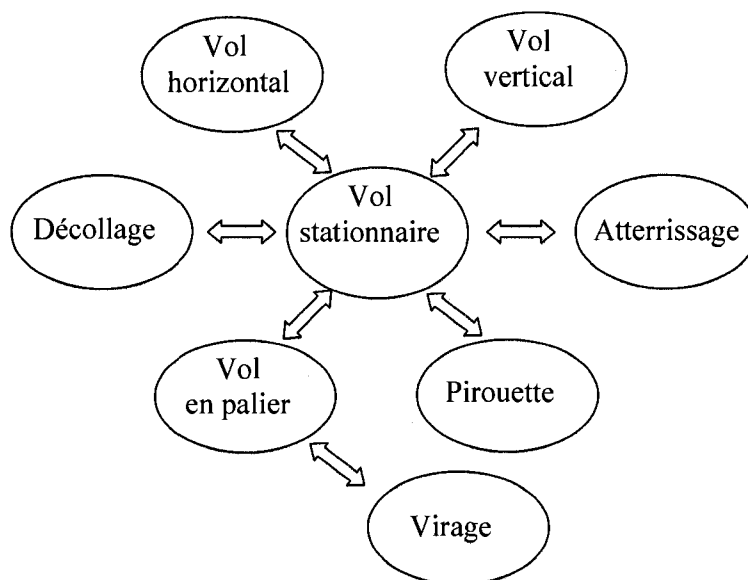


Figure 1.7 Principaux modes de vol

Dans la littérature traitant des aspects aérodynamiques des hélicoptères, les modes de vol sont analysés en termes de conditions particulières d'équilibre (en anglais *trim conditions*), de stabilité et de réponse. De manière générale les conditions particulières d'équilibre correspondent aux modes de vol, pour lesquels les quatre commandes sont fixes (trois pour le rotor principal et une pour le rotor anti-couple). La vitesse de rotation du rotor principal n'est pas directement commandée par le pilote : elle fait partie des variables asservies.

D'après les différentes directions du vol d'hélicoptère, nous pouvons classer les principales conditions particulières d'équilibre en définissant les cas suivants :

Vol stationnaire (en anglais *hover*). Ayant une vitesse de translation pratiquement nulle, l'hélicoptère garde une hauteur constante par rapport au sol.

Vol vertical. Est défini lorsque l'hélicoptère se déplace dans le plan vertical ou fait un vol suivant l'axe, z , (figure 1.1).

Vol rectiligne et horizontal. Est défini lorsque l'hélicoptère se déplace dans le plan horizontal. Le vol suivant l'axe, x , est connu comme vol en palier (en anglais *level flight*).

Virage et vol en spiral. Développé dans l'espace, le vol est réalisé suivant une ou plusieurs rotations selon les axes, x , y , et/ou, z .

Autorotation. L'autorotation est un mode de vol où on permet au rotor principal de tourner plus rapidement que le moteur qui l'entraîne. Tous les hélicoptères sont équipés d'une unité de roulement libre entre le moteur et le rotor principal, placée habituellement dans la transmission. En cas de panne du moteur, survenant à une hauteur suffisante, la mise en autorotation du rotor principal permet au pilote de descendre et d'atterrir sans dommage, grâce à la transformation de l'énergie potentiel en énergie cinétique de rotation.

Le comportement dynamique d'un hélicoptère en vol est le résultat de l'action et de l'interaction de différents sous systèmes : rotors, empennage, stabilisateurs, fuselage, moteur(s), commande, etc.

Pour un hélicoptère, vu comme un corps rigide, les états du fuselage (l'attitude et les vitesses linéaires et angulaires) sont définis de façon unique par la trajectoire de vol et les conditions d'équilibre. Considérons tout d'abord un système régit par les équations différentielles non-linéaires et non-stationnaires de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

où, f , est une fonction non-linéaire des forces et des moments de nature aérodynamique, structurelle, inertielle et gravitationnelle, définie dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec l'état du système $x(t) \in \mathbb{R}^n$, les conditions initiales x_0 et le vecteur des variables de commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Les états du fuselage sont représentés par le vecteur $\underline{x}_B = [u_b, v_b, w_b, \Phi_b, \Theta_b, \Psi_b, p_b, q_b, r_b]^T$ avec u_b, v_b, w_b les vitesses en palier, latérale et verticale, respectivement, p_b, q_b, r_b les vitesses angulaires de roulis, de tangage et de lacet, respectivement et l'attitude (angles d'Euler) Φ_b, Θ_b, Ψ_b , définie par les angles de roulis, de tangage et de lacet respectivement. Le vecteur de la commande est défini par $\underline{u} = [\theta_0, \theta_{1S}, \theta_{1C}, \theta_{TR}]^T$ où les variables θ_0 et θ_{TR} sont le pas collectif du rotor principal et du rotor de queue respectivement, θ_{1C} et θ_{1S} sont le pas cyclique latéral et longitudinal respectivement. Trois équations cinématiques entre les vitesses angulaires et les angles d'Euler augmentent les équations du mouvement. Les vitesses linéaires et angulaires sont référées à un repère fixe dans le centre de gravité du fuselage et les angles d'Euler définissent l'orientation de ce repère par rapport au repère inertiel. On dit que (x_e, u_e) est un point d'équilibre (ou point singulier) du système (1.1) s'il satisfait la contrainte:

$$0 = f(x_e, u_e, t) \quad (1.2)$$

Les concepts de base et les notions essentielles relatives à la stabilité s'appliquent au comportement des solutions (ou trajectoire) autour du point d'équilibre $\begin{cases} x = x_e + \delta x, \\ u = u_e + \delta u. \end{cases}$

Avec les quatre entrées de commande seulement quatre états d'équilibre peuvent être calculés; les autres sont définis par des équations additionnelles à partir de (1.1). Afin d'alléger l'exposé, nous supposons que le système est stationnaire et linéaire, c'est-à-dire régit par l'équation linéaire (1.3):

$$\delta \dot{x} - A \delta x = B \delta u(t) + F(t) \quad (1.3)$$

où la matrice de stabilité et la matrice de la commande sont définies par les dérivés partielles $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_e}$, $B = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{u=u_e}$ et $F(t)$ représente l'effet des perturbations atmosphériques (externes) et les incertitudes internes.

Ainsi la notion de stabilité fait intervenir le comportement de l'hélicoptère dans les conditions particulières d'équilibre face aux perturbations et aux incertitudes. Le vol est stable lorsqu'en réponse à une perturbation, les variables d'état du système convergent vers l'état d'équilibre. En pratique l'instabilité signifiera simplement que les variables sortent largement du domaine souhaité et ne tendent pas à y revenir de manière stable, mais au contraire s'en éloignent au moins périodiquement. La condition initiale est connue sous le nom de la stabilité statique pour distinguer les caractéristiques à long terme, qui sont définies par la stabilité dynamique. La quantification de la stabilité d'hélicoptère est développée à partir de la modélisation théorique et empirique de l'interaction des forces et des couples aérodynamiques. Cette propriété physique est mathématiquement liée avec les concepts des petites variations, de la linéarisation, des dérivés de stabilité et de la commande, des modes naturels, des fonctions de transfert, des matrices de transfert et des réponses dynamiques aux entrées de commande et de perturbation. Étant un système dynamique non linéaire présentant des couplages entre les variables d'état, la réponse de l'hélicoptère à une entrée unidirectionnelle est généralement multidirectionnelle. Dans la littérature la réponse directe ou indirecte est parfois vue comme axiale (en anglais *on-axis*) ou couplée (en anglais *off-axis*). La présente recherche étudie les réponses directes et indirectes des états du système aux entrées de commande, pour but de concevoir une commande robuste d'hélicoptère.

1.4 Interface pilote - hélicoptère

Ce volet de référence trace les limites psychologiques et physiques du pilote très ou peu expérimenté en fonction de la conception, d'application ou toute décision d'ingénieur influençant la manœuvrabilité ou le comportement de l'hélicoptère face aux

perturbations externes. Le pilotage d'hélicoptère en régime de vol aux instruments (en anglais *instrument flight rules*) s'avère difficile en absence de système d'augmentation de stabilité (en anglais *stability augmentation system*); de même que la navigation et l'atterrissage de nuit sans le radiophare omnidirectionnel VHF (*VHF omnirange* ou VOR) et le système d'atterrissage aux instruments (en anglais *Instrument Landing System* ou ILS). Évidemment la charge de travail et le stress que le pilote doit gérer dépendent crucialement de ses capacités disponibles.

Le pilotage d'hélicoptère peut être affecté par trois facteurs : la manœuvrabilité désigne les qualités intrinsèques d'un véhicule aérien (aussi terrestre ou naval) permettant de lui faire effectuer certains types de manœuvres; la maniabilité (en anglais *handling qualities*) désigne la plus ou moins bonne aptitude du véhicule à réagir aux sollicitations de son pilote (ou conducteur) pour effectuer les manœuvres désirées et enfin la réponse face aux perturbations externes (en anglais *ride qualities*) caractérise le comportement de l'aéronef en réponse aux perturbations atmosphériques. Ainsi le pilotage tangible sans danger, dans une enveloppe de vol, étant l'objectif principal de tout système de commande de vol, introduit les qualités ci-dessus comme une source logique d'objectifs fonctionnelles.

Ces qualités de vol sont généralement considérées en premier lors des essais de vol d'un prototype [Tis96a]. Cependant avec le développement de la technologie de commande active (*active control technology* ou ACT¹) et l'application (aux États-Unis) des normes ADS-33C [ADS-33C] et MIL-H-8501A [MIL-STD-1797A], les spécifications de ces qualités de vol sont respectées.

¹ La technologie de commande active (ACT) est une notion de la terminologie aéronautique pour désigner un aéronef qui n'utilise pas un lien mécanique direct entre les commandes dans le cockpit et les gouvernes. Un tel appareil inclut généralement des ordinateurs de vol qui modifient les entrées de commande en fonction de la réponse recherchée. En comparaison avec le terme commande de vol électrique (en anglais *fly-by-wire*) ACT est un terme plus correct, car il n'implique pas obligatoirement la transmission par fil électrique. Certains ACT systèmes utilisent par ex. des fibres optiques.

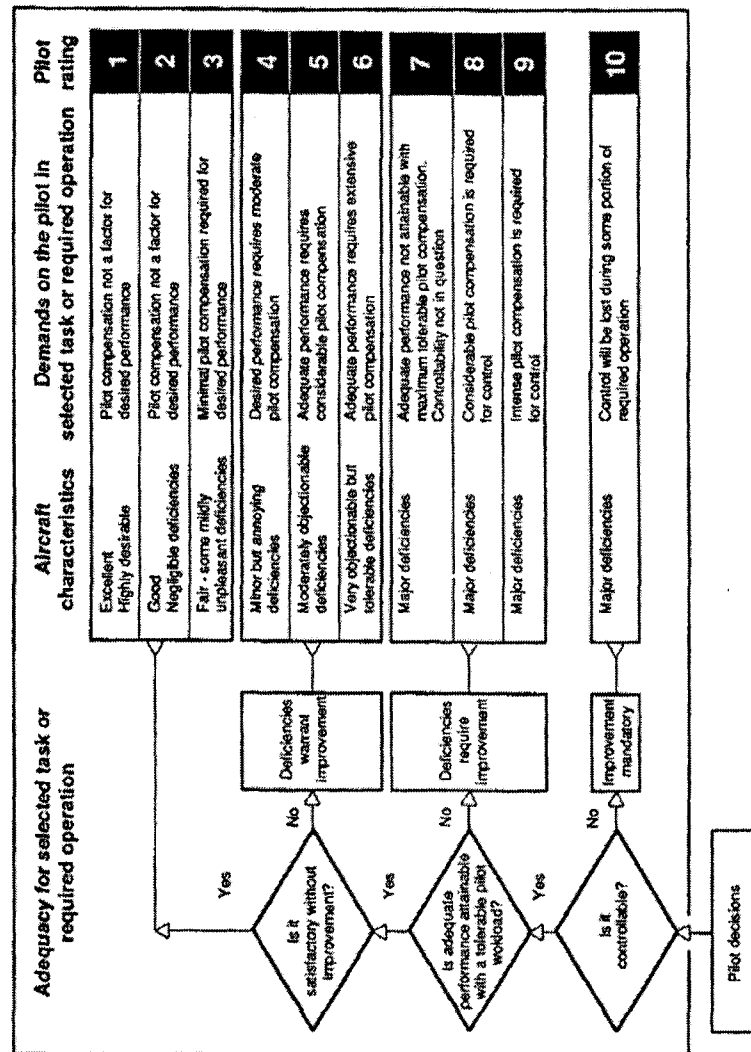


Figure 1.8 Échelle de Cooper et Harper pour évaluer la maniabilité [CH69]

Un aéronef mis en oscillations induites par son pilote d'essais (en anglais *pilot-induced oscillations* ou PIO²) échouera aux critères de temps de retard équivalent du système (en

²Les oscillations induites par le pilote font parties des pratiques des pilotes d'essais pour tester les qualités de vol. Elles consistent à initialiser certains modes par manipulation rapide (pousser et retourner dans la position d'origine) des entrées de commande.

anglais *equivalent system time delay*) et retard de phase (en anglais *bandwidth phase delay*) si ces derniers sont larges. Dans [CH69] Cooper et Harper définissent la maniabilité sur une échelle de dix (figure 1.8) qui est le critère de base pour toutes les spécifications commerciales et militaires des qualités de vol.

Finalement la norme MIL-STD-1797A fait la transition entre les qualités de vol classiques d'un aéronef (définie par la réponse fréquentielle en mode de courte période, mode de longue période ou phugoides, etc) et la technologie de commande active.

1.5 Modélisation de la dynamique du rotor principal

1.5.1 Composition d'un rotor

Un rotor comprend essentiellement :

- Un mât qui reçoit en outre la puissance motrice, sur lequel est fixé un moyeu;
- Deux ou plusieurs pales équidistantes ou disposées symétriquement;
- Un moyeu assurant la liaison entre les pales et le mât qui les entraîne en rotation.

Les pales d'un rotor sont en principe assemblées sur le moyeu par l'intermédiaire de "fusées". Le moyeu à son tour est relié directement à l'arbre ou mât du rotor. Ces fixations peuvent être de type articulation ou encastrement. Mise en rotation, les pales peuvent être assimilées à un profil d'aile. Chaque élément du profil supporte une force aérodynamique élémentaire de portance et de traînée de variation périodique. Le grand diamètre du rotor, ainsi que l'allongement (en anglais *aspect ratio*) des pales, privilégiés pour le rendement aérodynamique, ont comme conséquence le fait que les pales sont considérablement plus flexibles que les hélices des avions. Ainsi le rotor devient une source de vibrations et des contraintes pour l'appareil tout entier, dues principalement à des défauts d'équilibrage et des dissymétries aérodynamiques induites par le vol de l'appareil. Le niveau de ces excitations parasites croît avec la vitesse de translation et limite le domaine de vol et les performances des giravions. Les progrès technologiques

(nouveaux matériaux, pales à volets de fuite, etc.) permettent de repousser ces limites, mais il semble également intéressant de considérer la contribution de la commande à la résolution de ce type de problème.

Considérons une hélice à pas constant, sa mise en rotation donne naissance à une force parallèle à son axe de rotation. Pour changer la direction de cette force, on peut soit incliner l'axe de rotation ou faire varier de manière périodique le pas des pales de l'hélice. C'est cette deuxième solution qui est adoptée dans le cas des pales du rotor d'un hélicoptère. La force aérodynamique résultante assure à la fois la sustentation et la propulsion de la cellule.

D'une manière générale, le principe de base des ailes, des rotors et des hélices est qu'ils accélèrent une masse d'air et que la portance ou la poussée résultante est la réaction Newtonienne de cette accélération (figure 1.9).

Cependant, deux causes fondamentales sont à la source des forces et des moments aérodynamiques, que subit chaque pale au cours de son mouvement (comme bien sûr chaque profil aérodynamique soumis à un écoulement d'un fluide) :

- La distribution de la pression, s'exerçant selon la normale sur la surface de la pale;
- La distribution des efforts de frottement (contrainte de cisaillement) selon la tangente au profil de la pale.

L'intégration des distributions de la pression et des efforts de frottement sur la surface complète de chaque pale conduit à une résultante aérodynamique, proportionnelle au carré de la vitesse relative de la pale par rapport à l'air ambiant. Cette vitesse est la somme vectorielle de la vitesse de translation de l'hélicoptère, la vitesse périphérique de rotation du rotor et de la vitesse induite par l'accélération de la masse d'air.

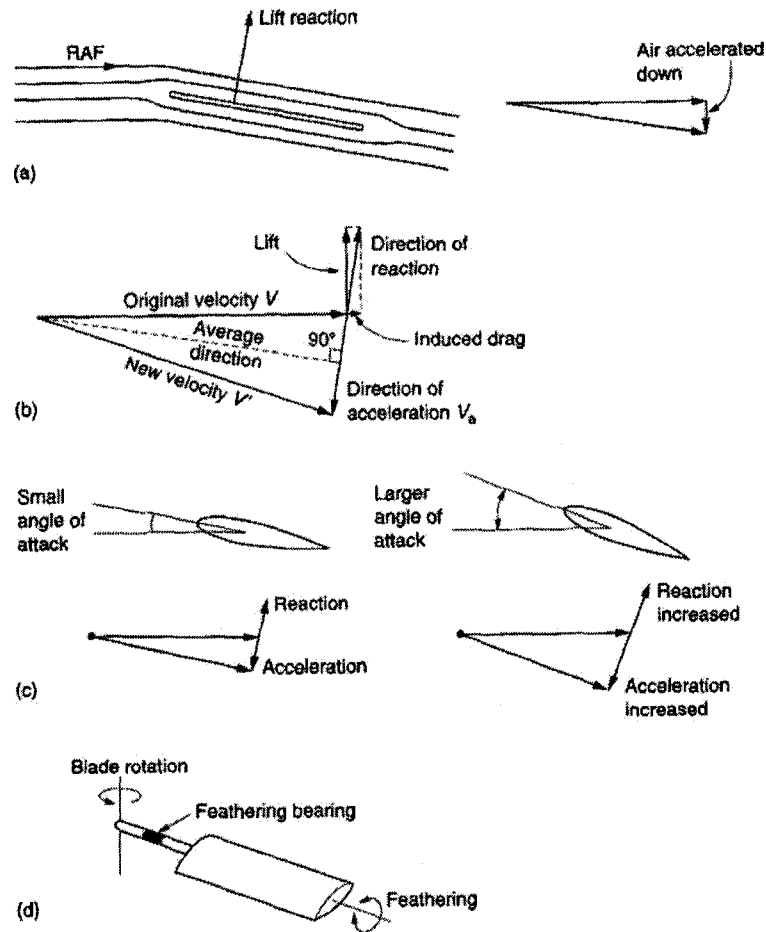


Figure 1.9 Le deuxième principe de Newton et la création de la portance [Wat04]

La capacité de portance, pour toute section de pale, est fonction de l'angle local d'attaque et de la pression dynamique locale. Définissons la position d'une pale dans le plan de rotation par l'angle d'azimut ψ_M , dont la position de référence ($\psi_M = 0$) par convention est définie dans la direction en aval. La figure 1.10 présente le cas de vol stationnaire pour lequel la variation de la vitesse radiale le long de l'envergure de la pale est symétrique et radialement linéaire avec une valeur nulle à l'emplanture et une valeur maximale V_{tip} à l'extrémité. Comme la pression dynamique locale est proportionnelle à la densité d'air et au carré de la vitesse relative, les forces aérodynamiques sont

radialement symétriques et pour un angle d'attaque constant, la force de sustentation est proportionnelle au carré de la vitesse d'extrémité $V_{tip} = \Omega_M R_M$.

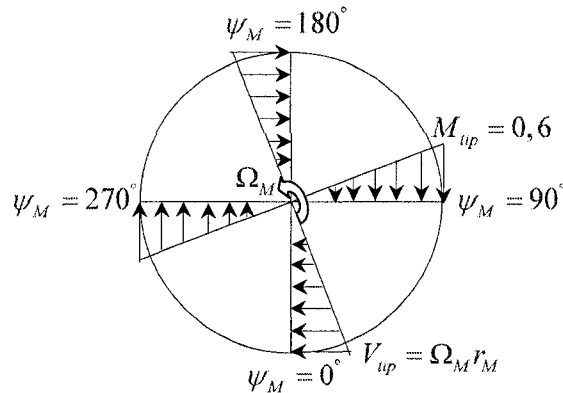


Figure 1.10 Distribution de la vitesse périphérique lors d'un vol stationnaire

Pourtant, lors d'un vol en palier à vitesse U_h figure 1.11, la vitesse d'extrémité V_{tip} prend la forme $\Omega_M r_M + U_h \sin(\psi_M)$, n'est plus symétrique et évidemment est fonction de l'angle d'azimut ψ_M , en retrouvant sa valeur maximale sur la pale avançant (dans le vent relatif) et sa valeur minimale sur la pale reculant. La dissymétrie provoque une région de flux inversé dans laquelle la vitesse périphérique frappe le bord de fuite de la pale plutôt que le bord d'attaque. En raison de la conception du moyeu (articulation de pales) et/ou du design de pales, la dissymétrie de la pression dynamique devient périodique, principalement avec la vitesse de rotation du rotor principal. En résumé, les pales commencent à battre verticalement et dans le plan de rotation, en inclinant le cône virtuel de l'extrémité de la pale. Cette tendance intrinsèque peut être compensée par le pilote par le biais d'un ajustement du pas cyclique. La distribution de la vitesse relative, de la vitesse induite, de la vitesse de battement et de l'angle de pas altèrent l'angle d'attaque pour toute section de pale et en conséquence les forces aérodynamiques. Le rotor trouve l'équilibre en battement et en traîné lorsque le changement de l'angle local d'attaque est suffisant pour compenser la dissymétrie de la pression dynamique locale.

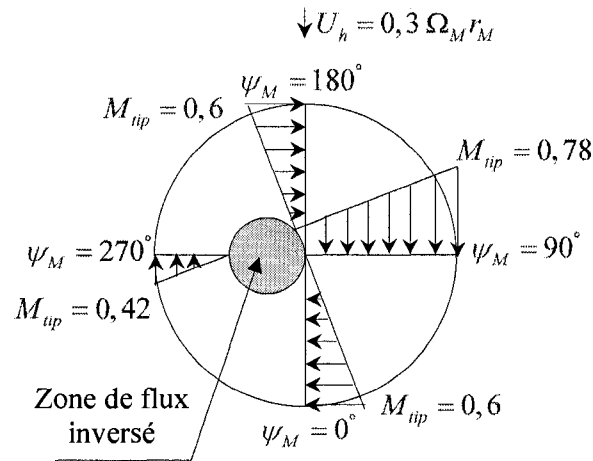


Figure 1.11 Distribution de la vitesse périphérique lors d'un vol en palier.

La description de la dynamique de la pale en présence d'élasticité structurale nécessite un modèle plus complexe, qui par contre ne sera pas développé dans cette recherche. A notre connaissance, les recherches les plus approfondies sur la dynamique des pales sont fournies par Johnson [Joh80], Bramwell [Bra76] et Bielawa [Bie06].

La complexité aérodynamique du vol d'hélicoptère évolue d'avantage lorsque la traînée de pression, le décollement de la couche d'air, ainsi que les tourbillons et les interactions du sillage du rotor principal avec le rotor de queue, l'empennage et la cellule sont pris en considération. Cependant pour des vitesses de vol à taux d'avancement $\mu = \frac{U_h}{\Omega_M r_M}$ inférieur à 0,3, la théorie prouve [Bra76] que ces effets physiques peuvent être ignorés sans dégradation significative du modèle de commande.

1.5.2 Mobilités de la pale

Les trois mobilités de la pale en conséquence sont :

- **L'angle de battement**, β , (en anglais *flapping*) (figure 1.12) produit une rotation de la pale par rapport à un axe dans le plan de rotation, perpendiculaire

au longeron de pale. Par convention le signe positif de l'angle est dans le sens de la force de sustentation.

- **L'angle de traînée, ζ** , (en anglais *lead-lag*) (figure 1.12) produit une rotation de la pale par rapport à un axe normal au plan de rotation et parallèle à l'axe du mât. Par convention le signe positif de l'angle de traînée est dans la direction opposée à la rotation du mât.
- **Pas cyclique, θ** , (en anglais *feathering*) (figure 1.12) produit un mouvement de rotation de la pale par rapport à l'articulation ou le roulement qui est parallèle à l'axe du longeron. Cette variation cyclique de l'angle de pas des pales du rotor en fonction de l'angle d'azimut est positive pour une rotation de tangage en cabré (en anglais *nose-up*).

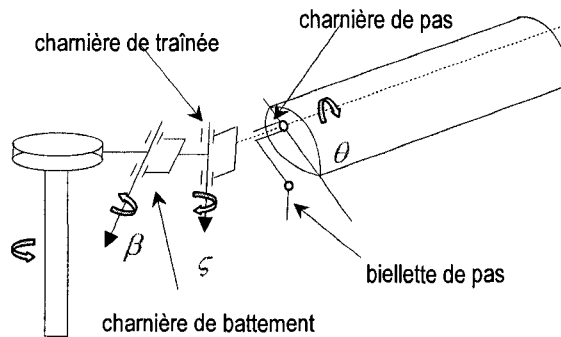


Figure 1.12 Mobilités de la pale

La dynamique quasi-statique de la pale, introduit ci-dessus, assume que le mouvement de la pale est périodique en fonction de l'azimut, ψ_M , et peut être développée en série de Fourier.

$$\beta(t) = \beta_0 + \beta_{1C} \cos(\psi_M t) + \beta_{1S} \sin(\psi_M t) + \beta_{2C} \cos(2\psi_M t) + \beta_{2S} \sin(2\psi_M t) + \dots \quad (1.4)$$

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \zeta_{1C} \cos(\psi_M t) + \zeta_{1S} \sin(\psi_M t) + \zeta_{2C} \cos(2\psi_M t) + \zeta_{2S} \sin(2\psi_M t) + \dots \quad (1.5)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_{1C} \cos(\psi_M t) + \theta_{1S} \sin(\psi_M t) + \theta_{2C} \cos(2\psi_M t) + \theta_{2S} \sin(2\psi_M t) + \dots \quad (1.6)$$

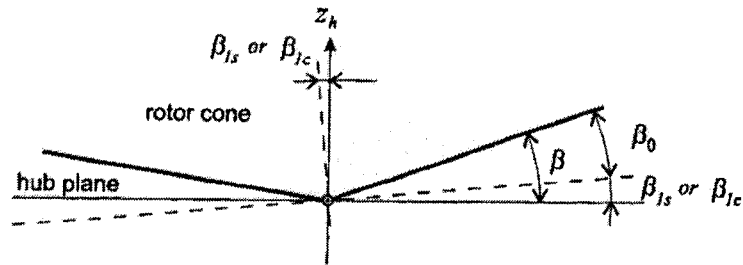


Figure 1.13 Battement verticaux des pales [Met03]

De manière mathématique, la force élémentaire de portance pour une section de la pale est fonction de l'azimut, ψ_M , et de l'ordre du développement en série de Fourier (figure 1.14).

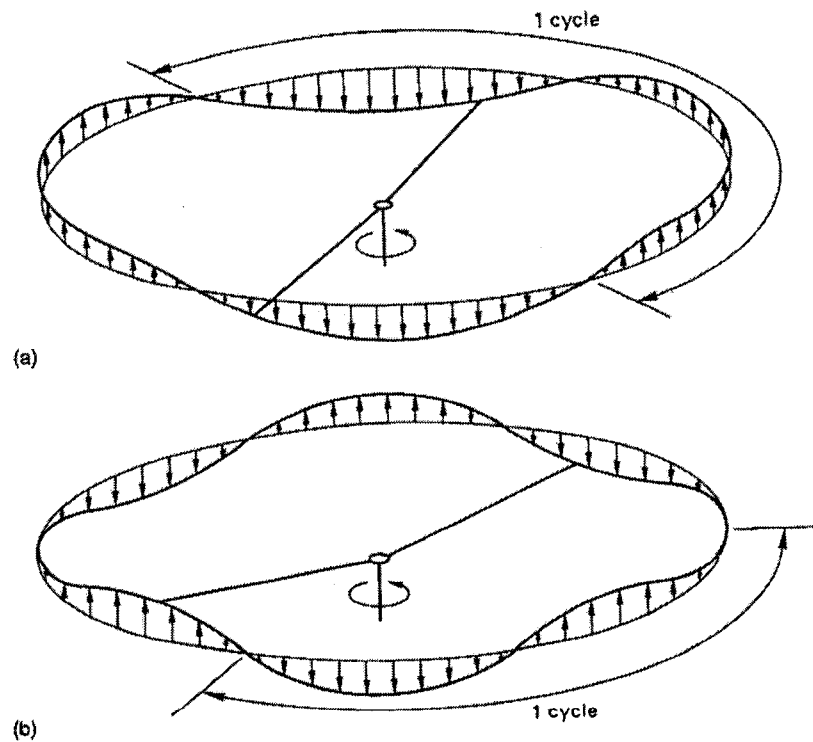


Figure 1.14 La portance pour une section de la pale en fonction de l'azimut (ψ_M) et de l'ordre du développement en série de Fourier (a) de second ordre; (b) de troisième ordre [Wat04]

En négligeant les termes correspondants aux harmoniques d'ordre supérieur ou égal à deux, car ils ont des effets assez faibles sur les forces et les couples aérodynamiques [Joh80], nous pouvons approximer la dynamique de battement (1.4) par l'expression (1.7) :

$$\beta(t) = \beta_0 + \beta_{1C} \cos(\psi_M t) + \beta_{1S} \sin(\psi_M t) \quad (1.7)$$

où β_0 est l'angle de conicité, β_{1C} et β_{1S} sont respectivement les angles longitudinal et latéral de battement. Ils sont définis par rapport au plan perpendiculaire au mât. D'une manière simpliste, nous pouvons assumer que l'amplitude de β_{1C} est déterminée par le couple de tangage que la force aérodynamique résultante du rotor principal doit produire autour du centre de gravité de l'aéronef pour compenser l'action des couples de tangage des forces aérodynamique produites par l'empennage, les stabilisateurs, la cellule et le rotor anti-couple. L'amplitude de β_{1S} est celle qui doit équilibrer l'hélicoptère sous l'action des couples de roulis.

Il a été montré dans [Joh80] que le mouvement de battement, défini dans le plan de l'extrémité de la pale (en anglais *tip-path plane*) et celui de pas cyclique (*feathering*), défini dans le plan de la commande sont équivalents dans le sens qu'une variation d'un degré en β produit les mêmes effets aérodynamiques qu'une variation d'un degré en θ . Le mouvement de battement vertical peut donc être éliminé complètement ou partiellement par la commande.

Du point de vue de la dynamique, ce type de mouvement trouve une position d'équilibre lorsque les forces aérodynamiques, inertielles, centrifuges et gyroscopiques sont en équilibre. Johnson a montré dans [Joh80], que quand cela se produit, l'inclinaison de la force de sustentation T_{MR} peut s'exprimer en fonction d'un angle maximal de battement

vertical, noté β_{\max} . Pour une condition normale³ de battement, l'orientation de T_{MR} est donnée par (1.8) :

$$e_T = \frac{-1}{\sqrt{1 - \sin^2(\beta_{1C}) \sin^2(\beta_{1S})}} \begin{bmatrix} \sin(\beta_{1C}) \cos(\beta_{1S}) \\ -\cos(\beta_{1C}) \sin(\beta_{1S}) \\ \cos(\beta_{1C}) \cos(\beta_{1S}) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

La description mathématique ou la simulation de la dynamique de vol d'hélicoptère implique la connaissance de plusieurs aspects liés à son comportement, tels que l'aérodynamique des rotors, du fuselage, des stabilisateurs et du train d'atterrissage, ainsi que d'autres aspects mécaniques, aérodynamique et structurels qui font intervenir l'influence des leviers de commandes et les perturbations atmosphériques sur la réponse de l'hélicoptère. Le problème de modélisation est très complexe et le comportement aérodynamique de l'hélicoptère est généralement limité par les effets locaux de décrochage des pales. Au niveau théorique, les difficultés principales de la modélisation de la dynamique de vol d'un hélicoptère proviennent de la dynamique des pales relativement à l'air et à l'écoulement d'air à travers eux. Il est convenable de décrire les différents degrés de complexité du rotor en trois niveaux selon l'application du modèle (Tableau 1).

³ La condition normale de battement se présente lorsque la pale bat vers le haut du côté du nez et vers le bas du côté de la queue $\beta_{1C} > 0$ et lorsqu'elle bat vers le bas du côté avançant et vers le haut du côté reculant $\beta_{1S} > 0$.

Tableau 1 Niveau de complexité du modèle mathématique du rotor [Pad96]

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
Aéro-dynamique	Linéaire de deux dimensions; dynamique de la vitesse induite évaluée localement; application de la théorie du disque sustentateur (en anglais <i>momentum theory</i>); intégration analytique des charges	Non linéaire, limitée à trois dimensions; dynamique de la vitesse induite évaluée localement; application de la théorie du disque sustentateur (<i>momentum theory</i>); effets locaux de décrochage des pales; introduction du vortex; compressibilité irrégulière en deux dimensions; intégration numérique des charges	Non linéaire; analyse complet du sillage; compressibilité irrégulière en deux dimensions; intégration numérique des charges
Dynamique	Pales rigides; 1) battements quasi statique 2) battements des pales avec 3 DDL 3) battements des pales avec 6 DDL et angle de traînée (en anglais <i>lag</i>) 4) battements des pales avec 6 DDL, angle de traînée et torsion quasi statique des pales	1) pales rigides et mêmes options qu'au niveau 1 2) nombre limité des modes élastique des pales	Représentation structurale détaillée par modes élastiques ou éléments finis
Applica-tion	Analyse paramétrique des qualités de vol et de la performance; A l'intérieur de l'enveloppe de vol; Commande en basse fréquence	Analyse paramétrique des qualités de vol et de la performance à la limite de l'enveloppe de vol; Bande passante plus large destinée au design des commandes de vol à gain élevé	Conception du rotor Estimation des charges limites Analyse vibrationnelle Analyse de la stabilité du rotor A la limite de l'enveloppe de sécurité

Au niveau 1, le plus bas, l'analyse de la stabilité et de la commande est basée sur un modèle dérivatif de l'hélicoptère comme un corps rigide à 6 DDL, pour lequel la dynamique des pales est quasi-statique, c'est-à-dire l'angle de battement et l'angle de traînée sont supposés instantanés, dont ses valeurs sont déterminées à partir des déplacements, des vitesses et des accélérations de la cellule. Bien que le modèle quasi-statique soit physiquement adapté à différentes applications d'analyse et commande en basse fréquence et dynamique de vol à longs termes, les caractéristiques aérodynamiques du rotor principal, le couplage entre le rotor et le fuselage, ainsi que les charges aérodynamiques ne peuvent pas être saisies sans un modèle complexe d'écoulement d'air à travers le rotor.

1.5.3 Modèle d'écoulement d'air à travers le rotor

Pour arriver à une prévision théorique correcte des charges aérodynamiques et des caractéristiques d'un hélicoptère, on doit nécessairement partir de la conception d'un modèle d'écoulement d'air à travers le rotor principal, ainsi qu'une base de données expérimentales et une bonne connaissance des phénomènes aérodynamiques qui se rapportent à cet écoulement. Chen, dans [Che89], résume les modèles dynamiques (non-uniformes) de la vitesse induite dans leur évolution historique. Visant comme application l'analyse de la dynamique de vol et la conception de commande de vol, l'étude compare le modèle harmonique simple de premier ordre avec les modèles empiriques plus sophistiqués, développés au cours des années. Très complet, le rapport perçoit l'aspect statique et dynamique de la vitesse induite pour un vol d'hélicoptère à basse ou à grande vitesse, ainsi que les différents modes de vol. La corrélation entre certains résultats expérimentaux, obtenus lors d'essais hors de l'effet de sol, indique que le modèle harmonique de premier ordre de Pitt/Peters approxime le mieux la dynamique de la vitesse induite pour tous les modes de vol. Dans des conditions près du sol, Chen suggère l'utilisation des tableaux, pareilles aux représentations du sillage non-contraint de Heyson/Karzoff et Castle/De Leeuw.

1.5.4 Les principales commandes

La fonction principale des quatre entrées du pilote est la suivante :

- **Le levier cyclique** permet deux types d'action (avant/arrière et gauche/droite). En effet, l'action sur le levier cyclique provoque une inclinaison du plateau cyclique par rapport à son plan de rotation initial (figure 1.15 (a)), donc une variation sinusoïdale de l'inclinaison de chaque pale dans le plan de rotation et par conséquent une inclinaison de la force aérodynamique de portance. Cette inclinaison produit aussi des couples de tangage et roulis (une modification de l'assiette de la machine) comme résultat d'un bras de levier de la ligne d'action de la force aérodynamique résultante par rapport au centre de gravité de l'hélicoptère. L'orientation du plateau cyclique détermine le plan de la commande par rapport au plan normal du mât, grâce aux entrées de commande **pas cyclique longitudinal** et **pas cyclique latéral**.
- **Le levier collectif** permet d'agir en même temps sur l'angle d'incidence de toutes les pales du rotor dans le plan de la commande. L'entrée de commande correspondante est **le pas collectif du rotor principal** (figure 1.15 (a)).
- **Le palonnier** permet d'agir en même temps sur l'angle d'incidence de toutes les pales du rotor anti-couple. L'entrée de commande correspondante est **le pas collectif du rotor de queue**.

Quand le pilote actionne le levier cyclique "en avant", le plateau cyclique s'incline de la même façon et comme la biellette de pas (figure 1.15 (b)) est déphasée à $90 [deg]$, la pale voit son angle de pas diminuer sur le tribord. Étant un système aérodynamique de deuxième ordre dominant, excité par une fréquence proche (et inférieure) à la fréquence de résonance, le rotor répond à une entrée de commande avec un déphasage "légèrement" inférieur à $90 [deg]$, la procédure ci-dessus inclinera la force de sustentation sur le nez de l'appareil, produisant un couple de tangage autour de centre de gravité de l'hélicoptère. La procédure de commande en roulis est similaire. Dans les

deux cas, l'inclinaison du plateau cyclique produit l'inclinaison de la portance dans la même direction. Ainsi, d'une manière descriptive, une manœuvre de base du pilotage consiste à orienter l'extrémité virtuelle de la pale par rapport au mât, de façon qu'en régime établi, la force aérodynamique résultante produira un changement de l'assiette du giravion comme résultat d'un bras de levier de la ligne d'action de la force par rapport au centre de gravité de l'hélicoptère.

Cependant, la réponse initiale du rotor aux actions du levier cyclique et du levier collectif est un mouvement conique et basculeur complexe du longeron de pales. Comme nous l'avons introduit, le mouvement est occasionné par la différence de la pression dynamique sur les profils des pales avançant et reculant.

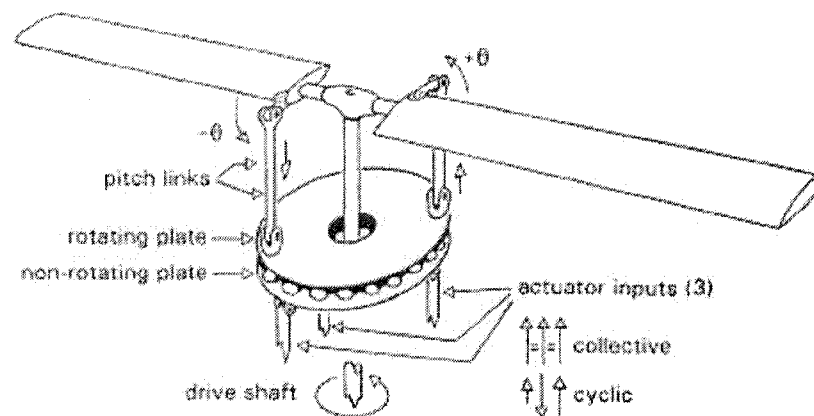


Figure 1.15 (a) Plateau cyclique et commandes du rotor principal [Pad96]

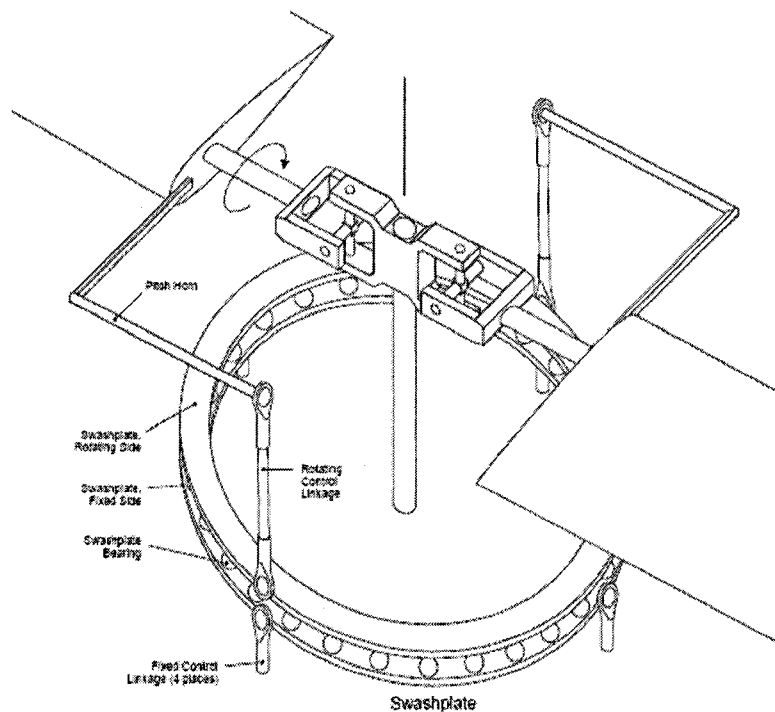


Figure 1.15 (b) Plateau cyclique et commandes du rotor principal articulé [Joh80]

1.5.5 Modèles d'hélicoptères et codes existants

Les modèles mathématiques d'hélicoptère sont développés pour une variété de cahier de charge, comprenant les évaluations des qualités de vol, la formation de pilotes (simulateurs de vol), la simulation et la mise à niveau de certaines composantes de la machine, ainsi que des enquêtes sur les accidents. Différentes approches sont actuellement utilisées pour développer les modèles mathématiques d'hélicoptères. Ces approches peuvent être généralisées en trois catégories : 1) modèles analytiques; 2) modèles d'identifications; 3) combinaison de 1) et 2). Les modèles analytiques se fondent sur des théories dynamiques et aérodynamiques, produisant des modèles en temps réel et hors temps réel. Ces modèles sont en principe non-linéaires et permettent d'extraire des modèles linéaires pour différents points de fonctionnement, demandent une connaissance approfondie sur la dynamique de vol d'hélicoptère et sont

difficilement ajustables pour faire correspondre les données des essais de vol avec le modèle. Nous pouvons noter certains exemples : [Joh77], [Rea78], [TTDC82], [Tak90] et pour les modèles d'hélicoptères de taille réduite [Met03]. Nous constatons, que dans la plupart des travaux, la modélisation de la dynamique de vol d'hélicoptère est basée sur le niveau 1 de complexité du modèle du rotor. Cependant, un certain nombre de modèles et codes logiciels, développés pour les besoins des principaux producteurs Sikorsky Aircraft Corporation, Bell Helicopter Textron, Boeing Rotorcraft et Eurocopter, sont disponibles et peuvent être téléchargés, via Internet. Parmi eux, le modèle GENeral HELicopter, formulé initialement par Howlett [How81] pour l'hélicoptère UH-60 de Sikorsky Aircraft Corporation et corrigé par Balin [Bal87], et Kim et al. dans [KCT93a] et [KCT93b] est utilisé par Kaplita et al. [KDDW89] pour l'hélicoptère avec rotors en tandem CH-53 de Boeing Rotorcraft. Le modèle et le code logiciel COMRAD (Comprehensive Analytical Model of Rotorcraft Aerodynamics and Dynamics), développé par Wayne Johnson, permet d'autre part d'effectuer une analyse aérodynamique d'un hélicoptère existant ou de faire le design d'un nouveau prototype, incluant sa dynamique structurelle.

Les modèles d'identification se servent des données expérimentales, rassemblées par des essais de vol ou de tunnel aérodynamique et présentent les caractéristiques aérodynamiques d'un giravion existant. De tels modèles sont généralement utilisés pendant les essais d'un prototype, pour optimiser les systèmes de commande de vol. Pourtant, les modèles d'identification n'essayent pas de traiter les composants de l'hélicoptère individuellement et leur domaine de confiance est généralement limité pour la configuration et les conditions particulières de vol.

En 2007 sont parues deux ouvrages qui résument les techniques de modélisation et simulation [Dre07], et d'identification de système d'hélicoptère [TR07].

1.6 Stratégies de commande d'hélicoptère

En commençant notre recherche, nous avions l'idée que la commande robuste d'hélicoptère, dans son contexte didactique était loin d'être originale. Durant les dix dernières années, plusieurs travaux ont été réalisés et plusieurs articles ont été publiés. La compétition internationale de robotique aérienne [www02] rassemble chaque année une quinzaine d'universités pour exécuter une mission de détection, de reconnaissance et d'appréhension d'objets dans un site de « catastrophe naturelle » à partir d'hélicoptères autonomes. Notons les groupes de recherches des universités aux États-Unis - Carnegie Mellon, Georgia Institute of Technology, University of California de Berkeley, Massachusetts Institute of Technology, les universités au Canada – DeVry Institute of Technology, École de Technologie Supérieure, University of Calgary, University of Waterloo, et les universités européennes Technischen Universität de Berlin, l'Institut de Zürich, etc, qui travaillent depuis quelques années sur le design et la commande automatique d'hélicoptères autonomes de petite taille. Le design et les techniques de commande automatique d'hélicoptères ont évolué et c'est grâce à l'envie de chercher et d'innover.

1.6.1 Stratégies de commande par retour linéaire

Les systèmes de commande des nouveaux hélicoptères doivent répondre aux spécifications de plus en plus exigeantes que posent les cahiers des charges militaires et civils. Les recherches et le développement des véhicules aériennes non-pilotés (en anglais *Rotorcraft Unmanned Aerial Vehicles* ou RUAV) permettant de construire des hélicoptères téléguidés et autonomes réalisant des manœuvres rapides avec agilité et précision. En conséquence, les systèmes de commande des nouveaux hélicoptères devraient fournir une bande passante⁴ plus large, une rapidité améliorée tant en montée

⁴ D'une façon générale, la bande passante est l'ensemble des fréquences pour lesquelles la réponse d'un appareil est supérieure à un minimum généralement de -3 [dB].

qu'en descente, moins de couplage entre les variables et un meilleur rejet des perturbations que les systèmes de commande existants. Généralement, les contraintes sur la conception des lois de commande de vol pour le giravion sont plus restrictives que ceux pour l'avion à aile fixe. La dynamique des pales dans le plan verticale (en anglais *out-of-plane*) ou battement et dans le plan de rotation (en anglais *in-plane*) ou traînée produit un certain nombre de modes dynamiques additionnels, qui généralement sont couplés aux modes rigides du fuselage et de la commande. Le phénomène de résonance d'air se produit quand un des modes devient légèrement amorti ou même instable à cause de ce couplage. Dans [DKM99] Dryfoos et al. montrent la dépendance de cette résonance avec la bande passante. Pour stabiliser le système Takahashi [Tak94] et Horn [Hor02] appliquent l'approche classique par retour d'état. Ceci permet d'obtenir de bonnes marges de stabilité, mais exige la connaissance totale de l'état et également des capteurs, mesurant la dynamique des pales. Une autre alternative est proposée par Ingle et Celi [IC92]. Elle consiste à utiliser des compensateurs dynamiques basés sur un modèle d'ordre élevé et précis de la dynamique couplée fuselage/rotor. Cette approche tend à avoir comme conséquence des contrôleurs complexes d'ordre élevé. La conception de lois de commande linéaires pour contrôler le mouvement d'un hélicoptère pose de nombreux problèmes car les modèles linéaires simplifiés sont généralement loin de la réalité du système physique. Le modèle dynamique complet d'un hélicoptère engendre en réalité des incertitudes qui constituent l'effet des perturbations sur la dynamique de vol et par conséquent, rend la synthèse des lois de commande linéaires plus difficile. Les lois de commande doivent donc présenter des propriétés de robustesse et de performance. A cet effet, des lois de commande robustes multi-entrées/multi-sorties (MIMO) ont été proposées par Rozak et Ray [RR97]. Après avoir fait une linéarisation numérique pour les vitesses de vol en palier de 80 et 140 nœuds pour un modèle de UH-60, Rozak et Ray ont développé des lois de commande basées sur l'analyse H_∞ pour des modèles d'état de 24 et 26 variables. Kienitz et al. présentent dans [KWM90] deux méthodes pour stabiliser le système :

- Stabilisation H_∞
- Stabilisation quadratique

Une comparaison des deux méthodes montre que la variation de l'angle de pas dans le temps est complètement bruitée lorsque la méthode de stabilisation H_∞ est utilisée. La méthode quadratique est donc préférable dans ce cas. Shim et al. dans [SHHS89] ont utilisé la théorie de la commande μ -Synthèse afin de contrôler un hélicoptère en mode de vol stationnaire. En effet, en supposant que toutes les incertitudes peuvent être regroupées dans un seul terme noté Δ_{pert} , alors le problème de la commande est défini comme suit : trouver un contrôleur $K(s)$, stabilisant le système de manière interne, tel que pour tout Δ_{pert} , le système bouclé soit stable.

1.6.2 Stratégies de commande par retour d'état non-linéaire

La linéarisation entrée-sortie (voir [Isi95]) a été appliquée dans bon nombre de domaines pour résoudre les problèmes de poursuite de sortie, concernant les systèmes dynamiques non linéaires, incluant les problèmes de décollage et d'atterrissage (VTOL) des robots aériens [HSM92]. Cependant, il y a une large classe de systèmes physiques qui ne satisfont pas les conditions restrictives de la linéarisation entrée-sortie. En effet, la linéarisation entrée-sortie ne peut être appliquée qu'aux systèmes non-linéaires à déphasage minimal [Isi95]. Si le système est à déphasage non-minimal (ou non-minimal de phase), c'est-à-dire qu'il engendre dans sa dynamique des zéros instables, l'application directe de la linéarisation entrée-sortie n'est pas possible [Isi95]. Due à la présence de la dynamique des zéros instables dans la matrice de transfert du modèle dynamique de l'hélicoptère, ce dernier est considéré comme un système non linéaire à déphasage non-minimal. En effet, pour contourner le problème, Koo et Sastry [KS99], par exemple, en se basant sur le travail de Hauser et al. [HSM92], ont proposé une commande d'hélicoptère par linéarisation entrée-sortie approximative, en ignorant les termes de couplage entre la dynamique de roulis (tangage) et la dynamique latérale (longitudinale).

Le système qui en résulte est un système réduit (approximé) sans la dynamique des zéros instables. Dans ce cas, le système dit «approximativement à déphasage minimal» n'est pas réellement un système à déphasage minimal. En se basant sur cette linéarisation approximative, une loi de commande pour la poursuite de trajectoires a été proposée, ainsi qu'une deuxième loi de commande, basée sur la théorie des systèmes uniformes. En utilisant le même modèle dynamique proposé par Koo et Sastry [KS99] d'autres recherches ont été réalisées. Dans, [MHD99], Mahony et al. proposent une loi de commande stabilisante pour le vol stationnaire à la base de la méthode directe de Lyapunov. Pourtant Frazzoli et al. proposent dans [FDF00] une poursuite de trajectoire basée sur les techniques robustes du "*backstepping*".

D'autres auteurs, comme Sira-Ramirez et al. dans [S-RZA94], appliquent une approche basée sur le mode de glissement pour stabiliser un hélicoptère en mode de vol vertical. Kaloust et al. [KHQ97], quant à eux, ont repris le modèle proposé dans [S-RZA94], et y ont proposé une loi de la commande basée sur la méthode directe de Lyapunov pour commander un hélicoptère à deux degrés de liberté.

1.6.3 Stratégies de commande par logique flou

La stratégie de commande par logique flou est "facile" à implémenter parce qu'elle n'a aucun besoin d'un modèle de système, mais les contrôleurs sont difficiles à ajuster [Jan07]. Souvent ils sont utilisés dans la commande des systèmes non linéaires et des systèmes où il est difficile de déterminer les paramètres. L'inconvénient dans l'ajustement du contrôleur peut être contourné en ajoutant un module de logique floue à un contrôleur linéaire, en lui accordant une certaine caractéristique non linéaire par le biais de l'approche "teste et erreur". Ceci pourrait être, par exemple, un contrôleur robuste qui doit être amélioré pour lui donner une meilleure performance.

1.6.4 Stratégies de commande par système de commutation

Dans [HTLWR05] le système de commande proposé a une architecture hiérarchique à deux niveaux. Le niveau inférieur est conçu en utilisant une approche aléatoire. En

tolérant certains niveaux de risques dans de différentes conditions de vol, le système de commande peut choisir de privilégier la stabilité robuste ou la performance nominale. Le contrôleur superviseur de niveau supérieur surveille la réaction du système pour un comportement anormal qui pourrait mener à l'instabilité ou la dégradation de la performance. Le contrôleur de surveillance peut alors commuter entre les contrôleurs robustes avec différents niveaux de risques et la performance.

Étant donné un ensemble de points, définis comme états du système linéaire (position, vitesse et accélération), la planification de la commutation consiste à interpoler ces points en respectant certaines contraintes additives généralement sur le lissage de la trajectoire. Les points, utilisés en tant que contraintes faibles, permettent un compromis entre la précision de poursuite et le lissage de trajectoire.

1.6.5 Stratégies de commande par l'approche H_∞

L'approche H_∞ et la technique de "*loop-shaping*" sont appliquées au cours des quinze dernières années dans un vaste domaine de recherche, notamment en aéronautique. Une étude détaillée de la littérature montre, que les contrôleurs, conçus par la méthode d'optimisation H_∞ , sont les seuls à être testé en vol piloté. Une loi de commande par l'approche H_∞ et la technique de "*loop-shaping*" avec système de commutation pour la dynamique longitudinal de DERA⁵ avion expérimental Harrier a été développée par Hyde [Hyd95]. En 1988, Yue et Postlethwaite [YP90] démontrent les avantages de la méthode d'optimisation H_∞ pour la synthèse d'un compensateur robuste à pleine autorité de 18 états pour la commande de vol d'hélicoptère. Walker et Postlethwaite dans [WP96] et Smerlas et al. dans [SPWSHHGB98], appliquent la méthode d'optimisation H_∞ pour la synthèse d'un compensateur robuste à deux degrés de libertés

⁵ QinetiQ est le nom actuel de DERA (Defence Evaluation and Research Agency) du Royaume Uni.

et testent la loi de commande respectivement sur l'hélicoptère de combat Westland Lynx et sur l'hélicoptère Bell 205 du Conseil National de Recherches Canada. Mentions aussi les recherches et testes pilotés sur DERA avion expérimental Harrier de Papageorigiou et Glover [PG00] et Bates et al. [BGPB00]. Toutes ces recherches ont été conçues en respectant les spécifications d'AGARD (*Advisory Group for Aeronautical Research and Development*), de MIL-F9490D (*General Specification for Flight Control Systems - Design Installation and Test of Piloted Aircraft*) et d'ADS-33 (*Aeronautical Design Standard*) et leurs résultats satisfaisant renforcent l'argument que l'approche H_∞ et la technique de *loop-shaping* pourront en effet être largement appliquer dans l'industrie aéronautique pour la synthèse de loi de commande robuste.

1.7 Conclusions sur la recherche bibliographique

D'après la recherche préliminaire sur la problématique et les travaux présentés ci-dessus, nous rapportons ce qui suit :

- La modélisation et la simulation lors de la phase de la conception d'un nouveau aéronef sont nécessaires pour tester les caractéristiques dans une enveloppe opérationnelle de vol et trouver les limites des différents modes de vol, ce qui réduit le temps et les coûts de développement, et certainement limite la possibilité de perte accidentelle du pilote ou de la machine. Quelle que soit l'approche adoptée, le modèle, n'étant qu'une représentation approchée de la réalité physique, dissimule certains phénomènes qui peuvent avoir, dans certaines conditions de fonctionnement, un effet non-négligeable. Parmi ces phénomènes, on peut citer ceux qui induisent les variations paramétriques, ceux correspondant aux dynamiques d'ordre élevé et bien notamment l'impact des perturbations atmosphérique sur la stabilité du système commandé. En conclusion, ces phénomènes doivent être pris en compte lors du processus de modélisation.

- Concernant l'étude des problèmes de la stabilité d'hélicoptère, la plupart des travaux se limitent aux modèles d'hélicoptères très simplifiés, localisant les performances des lois de commande sur un ensemble très restreint de conditions de vol.
- La théorie de stabilité et de commande de vol vise principalement à trouver les facteurs impliqués dans la conception des qualités de vol et en général à faire une évaluation précise de la réponse d'un aéronef aux entrées de commande et aux facteurs de perturbations. Étant donné que le rotor principal fournit la plus grande contribution à toute la stabilité de l'hélicoptère et sa dynamique (principalement de battement) la synthèse d'une loi de commande robuste et performante d'hélicoptère n'est pas possible sans la modélisation détaillée du rotor principal.
- La méthode d'optimisation H_{∞} et la méthode d'optimisation linéaire quadratique sont les seuls à être testés en vol piloté. Ces méthodes de stabilisation de la dynamique de vol d'hélicoptère sont des méthodes appropriées et nous voulons les exploiter.

1.8 Objectifs

L'étude détaillée de la stabilité et de la commande d'hélicoptère est une question complexe qui est au delà des objectifs de cette recherche. Par conséquent, une approche plus simple pourra être adoptée, se servant de plusieurs simplifications usuelles : la vitesse du rotor demeure constante; la pale du rotor est rigide en torsion; la dynamique de traînée est ignorée; l'angle de battement est supposé petit et le mouvement de battement vertical des pales, ainsi que l'angle de pas sont approximés avec les harmoniques de premier ordre; la distribution axiale (le long de l'envergure) de la vitesse induite est uniforme; la poussée du rotor est une fonction linéaire d'incidence locale de la pale et la force de résistance (traînée) est une fonction quadratique du coefficient de portance; les pertes de portance à l'extrémité et à l'emplanture de la pale sont ignorées;

la région d'écoulement inverse est ignorée; dans les conditions de vol d'équilibre, la dynamique perturbée du rotor est le résultat d'une série de perturbations du taux d'avancement, de la vitesse angulaire, de l'accélération angulaire et de l'accélération verticale du repère moyeu, etc.

Ainsi, les principaux objectifs de cette recherche sont :

- D'appliquer la méthode d'optimisation H_∞ et la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_2 pour la synthèse des compensateurs stabilisant la dynamique de vol du modèle linéaire d'hélicoptère autour du point d'équilibre.
- Dans le cas où on dispose de variables de décision mesurables, d'élaborer une structure de commande qui stabilise le système en boucle fermée.
- En présence des perturbations à énergie finie, qui peuvent affecter le système, de concevoir une loi de commande qui permet d'une part d'assurer la stabilité du système en boucle fermée et d'autre part de minimiser l'effet de ces perturbations sur le comportement du système.
- Lorsque les contraintes sur la loi de commande sont exigées, de trouver une procédure stabilisante, qui assure que les signaux de commande et les erreurs ne dépassent pas une certaine limite caractérisant la saturation possible pour les actionneurs.
- Dans le cas où le système est sujet à des incertitudes inconnues, mais bornées en normes, de trouver les conditions qui assure la stabilité robuste du système.

Cette recherche de modélisation et de commande robuste d'hélicoptère va donner lieu à l'application de différentes techniques de commande moderne et au développement de différents algorithmes, qui serviront à l'assistance au pilotage d'hélicoptère.

CHAPITRE 2 : MODÈLE MATHÉMATIQUE

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de développer un modèle mathématique d'hélicoptère avec un rotor principal articulé, basé sur les mouvements de battement et de traînée de la pale dus à une combinaison des charges aérodynamiques, de l'inertie et de la masse de la pale. Le modèle comporte quatre modules : les équations du mouvement de la cellule comme corps rigide, le modèle du rotor principal, le modèle du rotor de queue et le modèle atmosphérique. Le modèle du rotor principal permet la modélisation de différentes combinaisons dans l'ordre des articulations et accorde deux décalages entre les charnières. Les forces aérodynamiques sont calculées par la théorie de l'élément de pale. Aucune analyse d'aéroélasticité n'est employée et les pales sont supposées rigides. Les effets de déflexion vers le bas des filets d'écoulement d'air et la vitesse induite sont expliqués par le modèle dynamique de Pitt et Peters [PP81]. Les conditions d'équilibre et la linéarisation sont décrites et peuvent être appliqués à un sous-ensemble du modèle dans un repère mobile ou fixe. Dans l'annexe D sont donnés trois scripts : le premier permet de calculer la dynamique de battement et de traînée pour un rotor articulé, le deuxième permet de calculer la dynamique du battement vertical des pales et l'équation dynamique de l'extrémité de la pale et le troisième permet de calculer du modèle atmosphérique. Les deux premiers scripts utilisent le logiciel MAPLE, tandis que le troisième utilise le logiciel MATLAB.

2.2 Incertitudes paramètres du modèle

Étant donné que les paramètres caractéristiques d'hélicoptère varient généralement selon la mission et l'équipement additionnel, nous avons modélisé les variations des paramètres caractéristiques de l'hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky, qui est

l'objet de notre étude, en utilisant les données du constructeur (tableau 2) sur les valeurs maximales et minimales de ces paramètres. Ainsi définies, ces dernières sont perçues comme incertitudes paramétriques.

Tableau 2 Sommaire des variations des paramètres caractéristiques [How81]

CONDITION	WEIGHT	CENTER OF GRAVITY POSITION		MOMENT OF INERTIA Lb-In-Sec ²			
		STA	WL	I _{xx}	I _{yy}	I _{zz}	I _{xz}
Design Mission - Troops	16000.9	358.0	251.0	65550	473626	442646	18886
Aeromedical Mission	15479.3	359.0	251.1	64058	475389	441954	19510
Aerial Recovery Mission	20250.0	359.6	234.7	100200	502116	430804	22130
Extended Range Mission	19193.7	352.5	245.1	74633	502044	461813	28076
Basic Structural Design-Fwd.	16330.9	345.7	248.3	71141	500923	465328	34144
Basic Structural Design-Aft	16330.9	360.2	249.5	68263	465774	432719	19268
Maximum Alternate GW-Fwd	20250.0	347.1	244.4	79532	514803	479012	33850
Maximum Alternate GW-Aft	20250.0	360.2	245.1	77898	482141	447627	18408

2.3 Définition des systèmes de référence

2.3.1 Système inertiel

Pour ce mémoire, la terre est considérée comme système de référence inertiel; ainsi tout système en mouvement uniforme (par exemple le vent à vitesse constante) par rapport à la terre peut être considéré comme Newtonien. Cette simplification est basée sur le fait que les gyroscopes et les accéléromètres sont incapables de détecter la vitesse ou l'accélération angulaire de la terre. On dénote ce référentiel géométrique et atmosphérique par la lettre \mathcal{I} .

2.3.2 Le système "corps", le système "giravion" et le repère du constructeur

Le système \mathcal{B} "corps" (en anglais *body*) est modélisé comme corps rigide (giravion sans pales) dont le mouvement est défini par six équations différentielles. L'origine du système "corps" est posée dans le centre de masse d'hélicoptère sans pales. Le mouvement de translation est défini par les composants et les dérivées par rapport au temps du vecteur de la vitesse du centre de masse du giravion par rapport au repère inertiel $\dot{\vec{r}}_{hi}$; le mouvement de rotation est défini par les composants et les dérivées par rapport au temps du vecteur de la vitesse de rotation $\vec{\omega}_{B:T}$. Trois équations cinématiques, mettant en relation les angles d'Euler et les composantes de la vitesse de rotation, complètent le modèle dynamique du système "corps".

L'origine du système "giravion" est posée au centre de masse de l'hélicoptère. La direction positive \vec{i}_A vise la partie avant du fuselage (en anglais *nose*), la direction positive \vec{j}_A vise le tribord (en anglais *starboard*), la direction positive \vec{k}_A vise vers le bas. Le trièdre du repère "corps" est parallèle au trièdre du repère "giravion".

La position de certains points spécifiques de l'hélicoptère est choisie par le constructeur dans le repère \mathcal{O} et est définie par la référence longitudinale (en anglais *fuselage station STA*), la référence latérale (en anglais *buttlane BL*) et la référence verticale (en anglais *waterline WL*). Comme les données numériques de la position de ces points sont exprimées dans un repère spécifique, les valeurs doivent être prétraitées dans le repère "giravion" par la transformation suivante :

$$\text{Rot}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{O}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

2.3.3 Système de trajectoire de vol

L'origine du système de trajectoire de vol est placée au centre de gravité du fuselage. Le trièdre direct de la trajectoire de vol est orienté de la façon suivante : \vec{i}_p vise dans la direction de la vitesse de vol relative au repère inertiel, \vec{j}_p , dans le plan horizontal vise à droite et \vec{k}_p de manière à compléter le trièdre vise vers le bas. On dénote ce référentiel par la lettre \mathcal{P} .

2.3.4 Système "moyeu" (en anglais *hub*)

Le point d'attache du système "moyeu" est déplacée par rapport au système "corps" à une distance r_{bh} et est l'origine de deux repères fixes "moyeu" \mathcal{H} et "moyeu - vent" \mathcal{W} , et un ensemble de repères mobiles "arbre moteur" \mathcal{M} , ayant leur axe, \vec{k} , commun avec le repère "moyeu" ($\vec{k}_{\mathcal{H}} \equiv \vec{k}_{\mathcal{M}}$). Le système "moyeu" peut être incliné par rapport au repère "corps" \mathcal{B} . Vue que presque tous les hélicoptères existants ont une inclinaison initiale de l'axe du rotor principal, nous avons introduit deux angles Θ_h et Φ_h . Par convention ces angles d'inclinaison sont définis par la transformation, représentée sur la figure 2.1, obtenue comme une rotation de Θ_h autour de $(-\vec{j}_B)$, suivie d'une rotation de Φ_h autour de $(-\vec{i}_B)$. La transformation est :

$$\text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\Phi_h} & -S_{\Phi_h} \\ 0 & S_{\Phi_h} & C_{\Phi_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Theta_h} & 0 & S_{\Theta_h} \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{\Theta_h} & 0 & C_{\Theta_h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Theta_h} & 0 & S_{\Theta_h} \\ S_{\Phi_h} S_{\Theta_h} & C_{\Phi_h} & -S_{\Phi_h} C_{\Theta_h} \\ -C_{\Phi_h} S_{\Theta_h} & S_{\Phi_h} & C_{\Phi_h} C_{\Theta_h} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

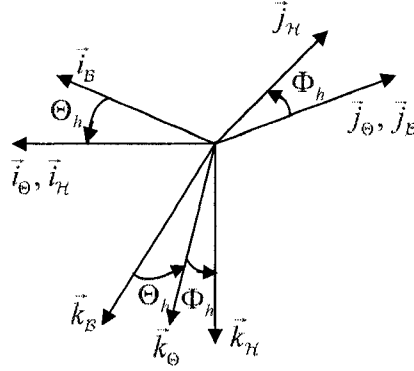


Figure 2.1 Inclinaison du repère "moyeu" (\mathcal{H}) par rapport au repère "corps" (\mathcal{B})

Le repère "moyeu" \mathcal{H} est supposé fixe et un repère mobile \mathcal{R}_k est associé à chaque pale k et tourne avec l'arbre moteur à une vitesse angulaire supposée constante $\vec{\omega}_{\mathcal{R}_k/\mathcal{H}} = (0, 0, -\Omega_m)^{(Z)}$. L'axe $\vec{j}_{\mathcal{R}_k}$ vise une des articulations (en anglais *hinge*). Pour se conformer à la pratique en matière habituelle d'analyse d'hélicoptère, la position de référence ($\psi_{\mathcal{R}_1}|_{t=0} = 0^\circ$) de l'arbre moteur est définie sur l'axe $(-\vec{i}_H)$. Les systèmes mobiles sont orientés à un angle d'azimut $\psi_k = \psi_{k+1} + \frac{2\pi}{b_N}$, $k = 0 \dots (b_N - 1)$ où (b_N) est le nombre des pales.

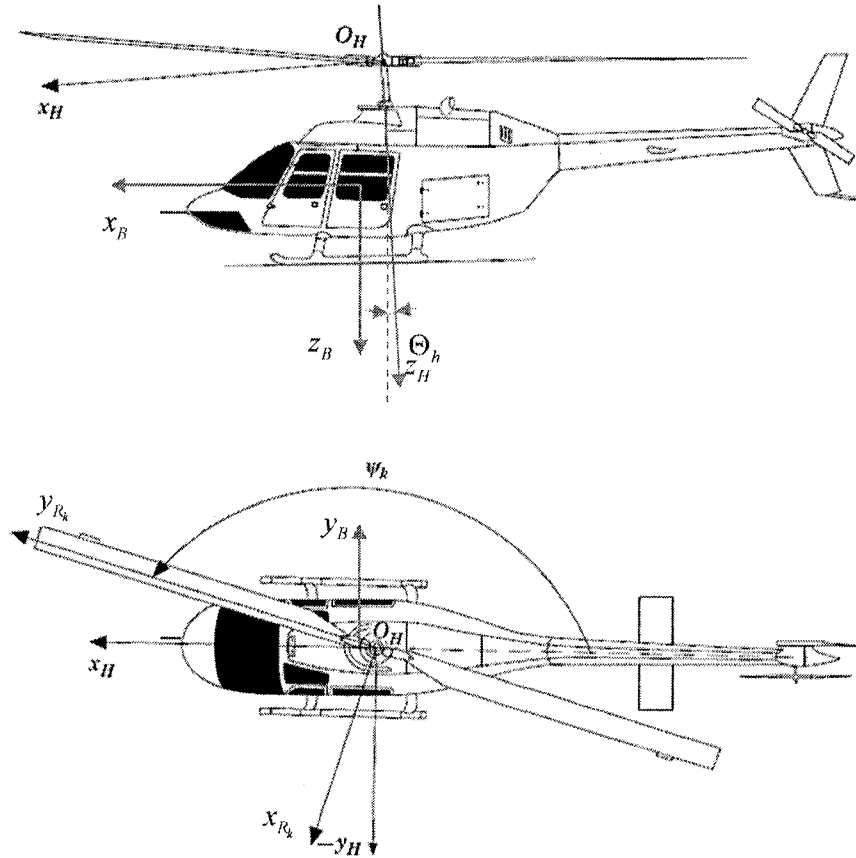


Figure 2.2 Orientation entre repères dans le système "moyeu"

Soit \vec{V}_H la vitesse de l'origine du repère "moyeu" \mathcal{H} . Le repère "moyeu-vent" \mathcal{WH} est orienté de la façon suivante : $\vec{i}_{\mathcal{WH}}$ vise dans la direction de \vec{V}_H , $\vec{j}_{\mathcal{WH}}$ est orienté par rapport au \vec{k}_H à un angle de glissement β_{wh} et $\vec{k}_{\mathcal{WH}}$ est orienté par rapport au \vec{j}_H à un angle d'incidence α_{wh} de manière à compléter le trièdre. On dénote ce référentiel par la lettre \mathcal{W} . L'orientation relative entre les repères énoncés est présentée à la figure 2.3.

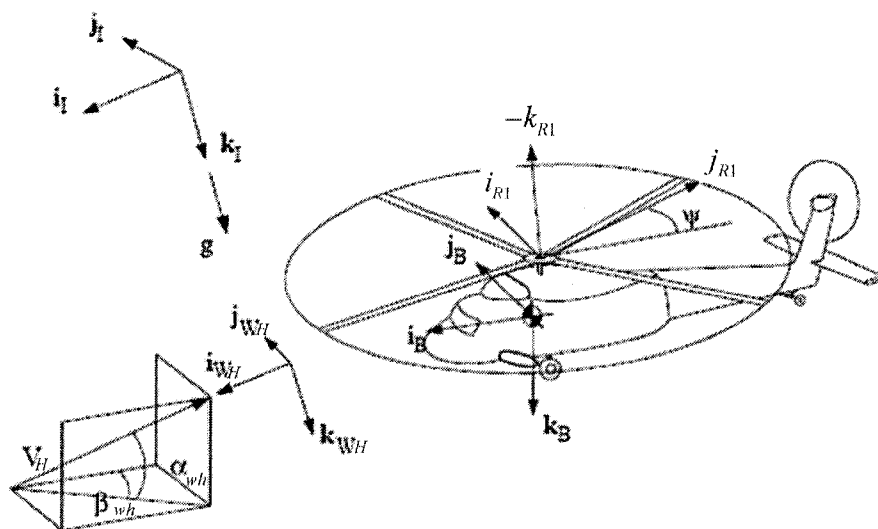


Figure 2.3 Orientation des repères fixes, mobiles et "moyeu - vent"

2.3.5 Système "pale articulée"

Les hélicoptères moyens (levage opérationnel de 5 à 7 tonnes) et de transport utilisent en principe de rotors articulés. Chaque rotor articulé possède trois charnières (figure 1.13) : de battement (en anglais *flapping*), de traînée (en anglais *lead-lag*) et de pas cyclique (en anglais *feathering*). La "charnière de battement" est utilisée pour diminuer la flexion dans l'emplanture des pales due aux forces de sustentation et centrifuges, celle "de traînée" est utilisée pour réduire les forces de traînée et de Coriolis dans le plan de rotation du rotor et celle "de pas cyclique" pour changer l'angle d'attaque de la pale.

L'origine de la première articulation par rapport au rotor est déplacée sur l'axe $\vec{j}_{\mathcal{H}}$ à une distance de ε_1 du centre du repère "moyeu" (\mathcal{H}). Le trièdre direct de la première articulation est orienté de façon suivante : \vec{i} sur l'axe de l'articulation, \vec{j} le long du vecteur de la seconde articulation et \vec{k} de manière à compléter le trièdre. L'origine de l'articulation suivante est déplacée sur l'axe \vec{j} de la première articulation à une distance

de ε_2 . Pour chaque profil aérodynamique (section) de la pale nous pouvons associer un repère "principal" $(\mathcal{T}_j)_k$ ($j=1-b_s$ où (b_s) est le nombre des sections). On suppose que les repères $(\mathcal{T}_j)_k$ passent par le centre de gravité de chaque section de la pale de façon à éliminer les produits d'inertie de la section. Ainsi les axes $\vec{j}_{\mathcal{T}_j}$ et $\vec{k}_{\mathcal{T}_j}$ sont les axes principaux du plan $(yz)_{\mathcal{T}_j}$, orientés par rapport au plan $(yz)_{\mathcal{T}_{j-1}}$ à un angle θ_{ij} , qui est fonction de la torsion de la pale. Les points significatifs de chaque section sont le centre de gravité et le point d'application de la force aérodynamique de coordonnée $y_{\mathcal{T}_j}$.

L'ordre des articulations est dicté en général par l'expérience et les préférences des constructeurs et peut varier d'un modèle d'hélicoptère à l'autre. Soit les systèmes de "battement" B_k , de "traînée" L_k , et de "pas cyclique" P_k . L'ordonnance des articulations (figure 1.13) peut être classifiée en deux groupes. Le premier groupe comprend la séquence pour laquelle le battement précède la traînée (ex. $B_k - L_k - P_k$, $B_k - P_k - L_k$ et $P_k - B_k - L_k$). Le deuxième groupe place la traînée avant le battement (ex. $L_k - B_k - P_k$, $L_k - P_k - B_k$ et $P_k - L_k - B_k$). En pratique, seulement les deux séquences $B_k - L_k - P_k$ et $L_k - B_k - P_k$ sont utilisées.

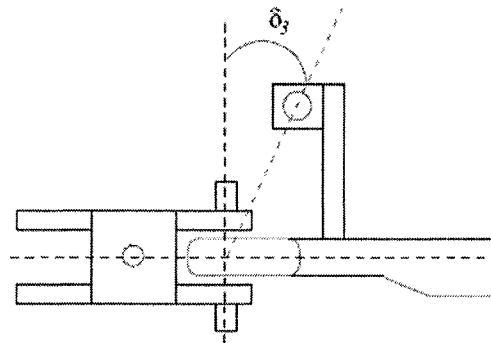


Figure 2.4 δ_3 articulations

Pour certains types de rotor, les mouvements de battement et de pas cyclique sont couplés de façon que le battement vertical des pales diminue le pas cyclique. Cette orientation mutuelle est appelée δ_3 articulation. (figure 2.4)

2.4 Les équations du mouvement de l'hélicoptère

2.4.1 Influence du poids des pales sur la position du centre de gravité du fuselage

La position du centre de gravité de l'hélicoptère $(\underline{cg}) = [l \ b \ h]^T$, de l'origine du

repère "moyeu" $(\underline{cgm}) = \begin{bmatrix} l_m \\ b_m \\ h_m \end{bmatrix}$ et de tous les points principaux sont généralement

déterminés dans le repère de référence longitudinal, latéral et vertical du constructeur \mathcal{O} . La position du centre de gravité du corps (hélicoptère sans pales) est calculée à partir de (\underline{cg}) , (\underline{cgm}) , des masses de l'hélicoptère m_A et de la pale m_p .

$$m_B = m_A + \Delta m_A - b_N m_p \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{bh}^{(\mathcal{O})} &= \vec{r}_{ba}^{(\mathcal{O})} + \vec{r}_{ah}^{(\mathcal{O})} \\ \vec{r}_{ba}^{(\mathcal{O})} &= \frac{b_N m_p}{m_B} \vec{r}_{ah}^{(\mathcal{O})} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{r}_{bh}^{(\mathcal{O})} = \left(1 + \frac{b_N m_p}{m_B} \right) \vec{r}_{ah}^{(\mathcal{O})} = \frac{m_A + \Delta m_A}{m_B} \vec{r}_{ah}^{(\mathcal{O})} \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{ob}^{(\mathcal{O})} &= \vec{r}_{oh}^{(\mathcal{O})} - \vec{r}_{bh}^{(\mathcal{O})} = \vec{r}_{oh}^{(\mathcal{O})} - \frac{m_A + \Delta m_A}{m_B} \vec{r}_{ah}^{(\mathcal{O})} \\ \vec{r}_{ah}^{(\mathcal{O})} &= \vec{r}_{oh}^{(\mathcal{O})} - \vec{r}_{oa}^{(\mathcal{O})} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{r}_{ob}^{(\mathcal{O})} = \left(1 - \frac{m_A + \Delta m_A}{m_B} \right) \vec{r}_{oh}^{(\mathcal{O})} + \frac{m_A + \Delta m_A}{m_B} \vec{r}_{oa}^{(\mathcal{O})} \quad (2.5)$$

où Δ représente la déviation de la valeur relativement à la valeur nominale.

2.4.2 Équations de translation et de rotation du giravion

La description du comportement de vol de l'hélicoptère présente un défi bien plus grand que la difficulté de la modélisation mathématique. Le véhicule peut être vu comme un ensemble complexe de sous-ensembles agissant l'un sur l'autre, visualisés à la figure 2.6, sous forme de forces et de moments. Une première approximation nous permet de voir l'hélicoptère comme un corps rigide, qui est sujet à des mouvements de translations et de rotations. Alors les équations de mouvements sont déduites des principes fondamentaux de Newton concernant le mouvement des corps en translation et en rotation. Les équations non linéaires du mouvement du corps sont développées en égalisant les taux de changement de la quantité de mouvement et du moment angulaire aux forces et aux moments appliqués. En supposant la masse constante, les équations sont construites en choisissant un point arbitraire à l'intérieur et en dérivant l'expression pour l'accélération absolue de ce point. L'accélération peut alors être intégrée sur le volume du fuselage pour dériver le changement du moment linéaire et par conséquent de toute la force d'inertie. Un processus semblable mène à l'accélération angulaire et au moment d'inertie correspondant.

Maintenant avant de développer les équations du mouvement, posons les conditions simplificatrices suivantes :

- S1. On considère que la masse du corps est constante lors de l'analyse d'une dynamique particulière. En effet lors du vol, la consommation de carburant est tellement faible que la masse du fuselage est pratiquement constante.
- S2. Le fuselage est considéré comme un corps rigide. La cellule par contre est déformable et les équations qui découlent sont complexes. D'un autre côté, considérer le fuselage rigide, simplifie les équations et par conséquent l'analyse.

S3. La déviation de la valeur nominale de la matrice inertielle du corps dépend de la configuration et est constante. Cette simplification est basée sur le fait que l'inertie des pales du rotor principal n'est pas incluse dans le calcul de la matrice inertielle du corps. La dynamique des pales est considérée séparément lors de l'analyse des équations du mouvement du rotor principal.

S4. Les produits d'inertie J_{xy} et J_{yz} sont nuls.

S5. Les capteurs gyroscopiques (ou centrale inertielle) sont placés dans le centre de masse du corps.

L'origine du repère mobile est choisie dans le centre de masse du fuselage. Nous pouvons exprimer l'accélération absolue d'un point matériel par la somme vectorielle de l'accélération de l'origine (centre de masse dans notre cas) par rapport au repère inertiel (terre fixe dans notre cas), l'accélération du point par rapport à l'origine du repère mobile, l'accélération de Coriolis et l'accélération d'entraînement. Alors, la dérivé par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un système de particules de masse δm , position $\vec{r}^{(B)}$, de vitesse absolue \vec{v} , de vitesse de l'origine \vec{V}_{bi} et de vitesse relative à l'origine $\vec{v}_r = 0$ (conditions S2) est égal à :

$$\frac{d}{dt} \sum (\delta m \vec{v}) = \frac{d}{dt} \sum \left(\delta m \left((\vec{V}_{bi})^{(B)} + \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{r}^{(B)} + \vec{v}_r \right) \right) = m_B \frac{d}{dt} (\vec{V}_{bi})^{(I)} \quad (2.8)$$

Sachant que la vitesse et l'accélération inertielle de translation et de rotation, mesurées

dans le repère "corps", B , sont $\begin{pmatrix} U_{bi} \\ V_{bi} \\ W_{bi} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{U}_{bi} \\ \dot{V}_{bi} \\ \dot{W}_{bi} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} P_{bi} \\ Q_{bi} \\ R_{bi} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{P}_{bi} \\ \dot{Q}_{bi} \\ \dot{R}_{bi} \end{pmatrix}$ respectivement,

l'accélération du repère, B , par rapport au repère inertiel a la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{V}_{bi})^{(I)} &\equiv \vec{A}_{bi} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{bi})^{(B)} + \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{V}_{bi}^{(B)} \\ \frac{d}{dt}(\underline{V}_{bi})^{(I)} &= \begin{bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{V}_b \\ \dot{W}_b \end{bmatrix} + [\vec{\omega}_{B/I}] \begin{bmatrix} U_b \\ V_b \\ W_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_b - R_b V_b + Q_b W_b \\ \dot{V}_b - P_b W_b + R_b U_b \\ \dot{W}_b - Q_b U_b + P_b V_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Supposons que la somme des forces externes puisse être écrite comme une combinaison des forces créées par le rotor principal, les forces aérodynamique de fuselage, la force aérodynamique du rotor anti couple, et celle des surfaces de l'empennage par rapport au centre de masse du giravion. Les équations linéaires du mouvement sont données finalement sous la forme vectorielle (2.10) :

$$\sum \underline{F}^{(B)} = \begin{bmatrix} \sum X_B \\ \sum Y_B \\ \sum Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M + X_T + X_F + X_H + X_V \\ Y_M + Y_T + Y_F + Y_V \\ Z_M + Z_T + Z_F + Z_H + Z_V \end{bmatrix} = \vec{F}_M + \vec{F}_F + \vec{F}_T + \sum_j^{n_s} \vec{F}_{S_j} = \frac{d}{dt}(m_B \vec{V}_{bi})^{(I)} - \vec{G}^{(B)} \quad (2.10)$$

où \vec{V}_{bi} est la vitesse linéaire relative au repère inertiel du centre de masse du corps, $\vec{G}^{(B)}$ est le vecteur de la projection orthogonale du poids total de l'hélicoptère sans pales sur les axes du repère "corps".

La somme des moments par rapport au centre de masse du corps s'exprime par la relation vectorielle suivante avec le moment angulaire \vec{H}_b :

$$\sum \underline{M}^{(B)} = \begin{bmatrix} \sum L_B \\ \sum M_B \\ \sum N_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_M + Y_M h_M + Z_M b_M + Y_T h_T + Y_V h_V + L_F + Y_F h_F \\ M_M - X_M h_M + Z_M l_M + M_T - X_T h_T + Z_T l_T - X_H h_H + Z_H l_H - \\ - X_V h_V + M_F - X_F h_F + Z_F l_F \\ N_M - Y_M l_M - Y_T l_T - Y_V l_V + N_F - Y_F h_F \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}(\vec{H}_b)^{(I)} \quad (2.11)$$

où la sommation est faite pour tous les particules du système. Selon la simplification S3 et S4 nous pouvons écrire :

$$\vec{h}_b = J \vec{\omega}_{B/I} = \begin{bmatrix} J_{XX} & 0 & -J_{XZ} \\ 0 & J_{YY} & 0 \\ -J_{XZ} & 0 & J_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\omega}_x \\ \vec{\omega}_y \\ \vec{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Le moment angulaire absolu est calculé par :

$$\vec{H}_b = \vec{h}_b + \sum \vec{r}^{(B)} \times \left(\delta m \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} \right) = \vec{h}_b + \vec{r}_g^{(B)} \times m_B \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} \quad (2.14)$$

avec \vec{r}_g le vecteur de position du centre de masse. Alors, la dérivée par rapport au temps du moment angulaire absolu est :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_b &= J \dot{\vec{\omega}}_{B/I} + \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_g^{(B)} \right) \times m_B \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} + \vec{r}_g^{(B)} \times m_B \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} + \\ &+ \vec{\omega}_{B/I} \times \left(\vec{h}_b + \vec{r}_g^{(B)} \times m_B \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} \right) \\ \dot{\vec{H}}_b &= J \dot{\vec{\omega}}_{B/I} + \vec{\omega}_{B/I} \times J \vec{\omega}_{B/I} + \vec{v}_g^{(B)} \times m_B \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} + \vec{r}_g^{(B)} \times m_B \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si l'origine des axes est le centre de masse ou un point fixe dans le repère mobile, alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{H}}_b \right) = J \frac{d}{dt} \left(\vec{\omega}_{B/I} \right) + \vec{\omega}_{B/I} \times J \vec{\omega}_{B/I} \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{\omega}_{B/I} \right) = \dot{\vec{\omega}}_{B/I} = \dot{P}_{bi} \vec{i}_B + \dot{Q}_{bi} \vec{j}_B + \dot{R}_{bi} \vec{k}_B \quad (2.17)$$

et pour les deux cas $\vec{r}_g \times m_B \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} = 0$ et $\vec{v}_g^{(B)} = 0$ ou $\vec{v}_g^{(B)} = \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)}$, donc

$\vec{v}_g^{(B)} \times m_B \left(\vec{V}_{bi} \right)^{(B)} = 0$. En remplaçant le résultat de (2.16) dans (2.11), on obtient l'expression vectorielle (2.18).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{B/I}) &= J^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \sum L_B \\ \sum M_B \\ \sum N_B \end{bmatrix} - \vec{\omega}_{B/I} \times J \vec{\omega}_{B/I} \right\} \Rightarrow \\
\dot{P}_{bi} &= \frac{J_{ZZ}}{J_{XX} J_{ZZ} - J_{XZ}^2} (\sum L_B + (J_{YY} - J_{ZZ}) Q_{bi} R_{bi} + J_{XZ} P_{bi} Q_{bi}) + \\
&+ \frac{J_{XZ}}{J_{XY} J_{ZZ} - J_{XZ}^2} (\sum N_B + (J_{XX} - J_{YY}) P_{bi} Q_{bi} - J_{XZ} Q_{bi} R_{bi}) \\
\dot{Q}_{bi} &= \frac{1}{J_{YY}} (\sum M_B + (J_{ZZ} - J_{XX}) P_{bi} R_{bi} + J_{XZ} (R_{bi}^2 - P_{bi}^2)) \\
\dot{R}_{bi} &= \frac{J_{XX}}{J_{XX} J_{ZZ} - J_{XZ}^2} (\sum N_B + (J_{XX} - J_{YY}) P_{bi} Q_{bi} - J_{XZ} Q_{bi} R_{bi}) + \\
&+ \frac{J_{XZ}}{J_{XX} J_{ZZ} - J_{XZ}^2} (\sum L_B + (J_{YY} - J_{ZZ}) Q_{bi} R_{bi} + J_{XZ} P_{bi} Q_{bi})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Avant que les calculs des équations du mouvement du corps puissent être exécutés, certaines transformations entre les repères doivent être définies. En 1772, Leonard Euler a montré que toute rotation autour d'un axe quelconque peut être décomposée en trois rotations fondamentales. En mécanique et en aéronautique il y a une convention qui veut que l'attitude (position angulaire) résulte de trois rotations, obtenue comme une rotation de Ψ_b autour de \vec{k}_I , suivie d'une rotation de Θ_b autour de \vec{j}_B et d'une rotation de Φ_b autour de \vec{i}_B . La transformation résultante est :

$$\begin{aligned}
\text{Rot}_{I \leftarrow B} &= \begin{bmatrix} C_{\Psi_b} & -S_{\Psi_b} & 0 \\ S_{\Psi_b} & C_{\Psi_b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Theta_b} & 0 & S_{\Theta_b} \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{\Theta_b} & 0 & C_{\Theta_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\Phi_b} & -S_{\Phi_b} \\ 0 & S_{\Phi_b} & C_{\Phi_b} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} C_{\Psi_b} C_{\Theta_b} & C_{\Psi_b} S_{\Theta_b} S_{\Phi_b} - S_{\Psi_b} C_{\Phi_b} & C_{\Psi_b} S_{\Theta_b} C_{\Phi_b} + S_{\Psi_b} S_{\Phi_b} \\ S_{\Psi_b} C_{\Theta_b} & S_{\Psi_b} S_{\Theta_b} S_{\Phi_b} + C_{\Psi_b} C_{\Phi_b} & S_{\Psi_b} S_{\Theta_b} C_{\Phi_b} - C_{\Psi_b} S_{\Phi_b} \\ -S_{\Theta_b} & C_{\Theta_b} S_{\Phi_b} & C_{\Theta_b} C_{\Phi_b} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Étant donné que la matrice de transformation $\text{Rot}_{I \leftarrow B}$ est orthogonale, alors $\text{Rot}_{B \leftarrow I} = (\text{Rot}_{I \leftarrow B})^{-1} = (\text{Rot}_{I \leftarrow B})^T$ et la projection orthogonale du poids total de l'hélicoptère sans pale sur les axes du repère "corps" est calculée comme :

$$\vec{G}^{(B)} = \text{Rot}_{B \leftarrow I} \vec{G}^{(I)} = m_B \text{Rot}_{B \leftarrow I} \vec{g}(\text{alt}) = m_B \text{Rot}_{B \leftarrow I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \vec{k}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_B g S_{\Theta_b} \vec{i}_S \\ m_B g C_{\Theta_b} S_{\Phi_b} \vec{j}_S \\ m_B g C_{\Theta_b} C_{\Phi_b} \vec{k}_S \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

où $\vec{g}(\text{alt})_{\text{alt}=0}$ est l'accélération gravitationnelle au niveau de référence.

Pour compléter le modèle, on a besoin de connaître la relation entre le vecteur de la vitesse angulaire inertielle et les angles d'Euler. Cette expression cinématique (2.21) peut être vue comme matrice Jacobienne. Comme $\text{Rot}_{\omega \leftarrow \text{Euler}}$ n'est pas une matrice orthogonale, alors $(\text{Rot}_{\omega \leftarrow \text{Euler}})^{-1} \neq (\text{Rot}_{\omega \leftarrow \text{Euler}})^T$ et la relation inverse est donnée par l'expression (2.22). Une expression cinématique concernant la relation entre les l'accélération angulaire et les angles d'Euler et leurs dérivées est donnée par (2.23).

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{B:I} &= \begin{pmatrix} P_{bi} \\ Q_{bi} \\ R_{bi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\Phi_b} & S_{\Phi_b} \\ 0 & -S_{\Phi_b} & C_{\Phi_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta}_b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\Phi_b} & S_{\Phi_b} \\ 0 & -S_{\Phi_b} & C_{\Phi_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Theta_b} & 0 & -S_{\Theta_b} \\ 0 & 1 & 0 \\ S_{\Theta_b} & 0 & C_{\Theta_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi}_b \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_{\Theta_b} \\ 0 & C_{\Phi_b} & S_{\Phi_b} C_{\Theta_b} \\ 0 & -S_{\Phi_b} & C_{\Phi_b} C_{\Theta_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_b \\ \dot{\Theta}_b \\ \dot{\Psi}_b \end{bmatrix} = R_{\omega \leftarrow \text{Euler}} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_b \\ \dot{\Theta}_b \\ \dot{\Psi}_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi}_b \\ \dot{\Theta}_b \\ \dot{\Psi}_b \end{bmatrix} = (R_{\omega \leftarrow \text{Euler}})^{-1} \begin{pmatrix} P_{bi} \\ Q_{bi} \\ R_{bi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R_{bi} C_{\Phi_b} + Q_{bi} S_{\Phi_b}}{C_{\Theta_b}} \\ Q_{bi} C_{\Phi_b} - R_{bi} S_{\Phi_b} \\ P_{bi} + \dot{\Phi}_b S_{\Theta_b} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\underline{\dot{\omega}}_{B/T} = \begin{bmatrix} \dot{P}_{bi} \\ \dot{Q}_{bi} \\ \dot{R}_{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\Phi}_b - \dot{\Theta}_b \dot{\Psi}_b C_{\Theta_b} - \ddot{\Psi}_b S_{\Theta_b} \\ \ddot{\Theta}_b C_{\Phi_b} - \dot{\Phi}_b \dot{\Theta}_b S_{\Phi_b} + \ddot{\Psi}_b S_{\Phi_b} C_{\Theta_b} + \dot{\Phi}_b \dot{\Psi}_b C_{\Phi_b} C_{\Theta_b} - \dot{\Theta}_b \dot{\Psi}_b S_{\Phi_b} S_{\Theta_b} \\ -\ddot{\Theta}_b S_{\Phi_b} - \dot{\Phi}_b \dot{\Theta}_b C_{\Phi_b} + \ddot{\Psi}_b C_{\Phi_b} C_{\Theta_b} - \dot{\Phi}_b \dot{\Psi}_b S_{\Phi_b} C_{\Theta_b} - \dot{\Theta}_b \dot{\Psi}_b C_{\Phi_b} S_{\Theta_b} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Pour calculer les valeurs des angles d'Euler, il faut intégrer numériquement l'expression (2.22).

2.5 Les équations du mouvement du rotor principal

2.5.1 Modèle dynamique de battement et de traînée des pales du rotor dans le repère "moyeu"

Étant donné que le mouvement cyclique de battement des pales fournit une commande indirecte sur l'orientation de la poussée de rotor et des moments de moyeu du rotor (c'est-à-dire le pilote a seulement la commande directe de l'angle de pas de la pale), par conséquent cette dynamique introduit pour l'hélicoptère l'aptitude primaire de voler. Les mouvements et la torsion des pales sont influencés par les charges aérodynamiques non linéaires, qui sont elles-mêmes fonction du mouvement de la pale. Le schéma de la figure 2.8 illustre ce problème aéro - élastique comme système à rétroaction. Les deux boucles de rétroaction fournissent des perturbations d'incidence dues aux mouvements du rotor et du fuselage, et à la déflexion vers le bas de l'écoulement du rotor qui sont ajoutés à ceux dus aux entrées de commande et aux perturbations atmosphériques. Ces deux boucles de rétroaction dominent le modèle du rotor et par conséquent impliquent le besoin d'être détaillées. Pour le calcul des charges aérodynamiques, nous serons concernés par le mouvement de pale relativement à l'air et par conséquent le mouvement du moyeu et du fuselage, aussi bien que le mouvement des pales relativement au moyeu. Le mouvement relatif sera un thème se reproduisant dans ce chapitre qui introduit en principe le besoin de repères et de systèmes de référence. Pour dériver le mouvement relatif et les diverses transformations, nous nous référons au schéma de la figure 2.8.

Bien qu'il existe différents types de rotor, l'amplitude des mouvements des pales et la réponse aux entrées de commande et aux rafales sont très semblables.

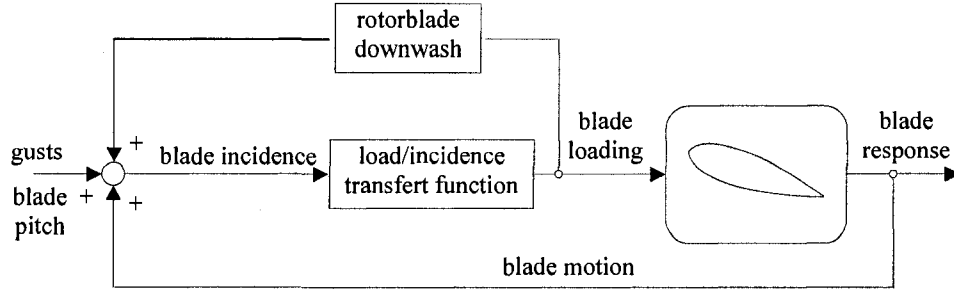


Figure 2.7 Schéma bloc de l'aérodynamique des pales [Pad96]

Soit \vec{V}_H la vitesse du centre du repère fixe "moyen" \mathcal{H} .

$$\underline{V}_H^{(\mathcal{H})} = \text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{B}} \left[\underbrace{\underline{V}_{bi}^{(\mathcal{B})} + (\underline{\omega}_{B/I} \times \underline{r}_{bh}^{(\mathcal{B})})}_{\vec{V}_H^{(\mathcal{B})}} \right]$$

$$\underline{V}_H^{(\mathcal{H})} = \begin{bmatrix} C_{\Theta_h} & 0 & S_{\Theta_h} \\ S_{\Phi_h} S_{\Theta_h} & C_{\Phi_h} & -S_{\Phi_h} C_{\Theta_h} \\ -C_{\Phi_h} S_{\Theta_h} & S_{\Phi_h} & C_{\Phi_h} C_{\Theta_h} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} U_b \\ V_b \\ W_b \end{bmatrix} + [\ddot{\omega}_{B/I}^{(\mathcal{B})}] \begin{bmatrix} l_h \\ b_h \\ h_h \end{bmatrix} \right\} \quad (2.24)$$

Pour $\Phi_h = 0$ et $b_h = 0$

$$\underline{V}_H^{(\mathcal{H})} = \begin{bmatrix} U_h \\ V_h \\ W_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Theta_h} & 0 & S_{\Theta_h} \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{\Theta_h} & 0 & C_{\Theta_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b + Q_b h_h \\ V_b - P_b h_h + R_b l_h \\ W_b - Q_b l_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Theta_h} (U_b + Q_b h_h) + S_{\Theta_h} (W_b - Q_b l_h) \\ V_b - P_b h_h + R_b l_h \\ -S_{\Theta_h} (U_b + Q_b h_h) + C_{\Theta_h} (W_b - Q_b l_h) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\underline{\omega}_{B/I}^{(\mathcal{H})} = \begin{bmatrix} P_h \\ Q_h \\ R_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Theta_h} & 0 & S_{\Theta_h} \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{\Theta_h} & 0 & C_{\Theta_h} \end{bmatrix} \underline{\omega}_{B/I}^{(\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_h) P_b + \sin(\Theta_h) R_b \\ Q_b \\ -\sin(\Theta_h) P_b + \cos(\Theta_h) R_b \end{bmatrix}$$

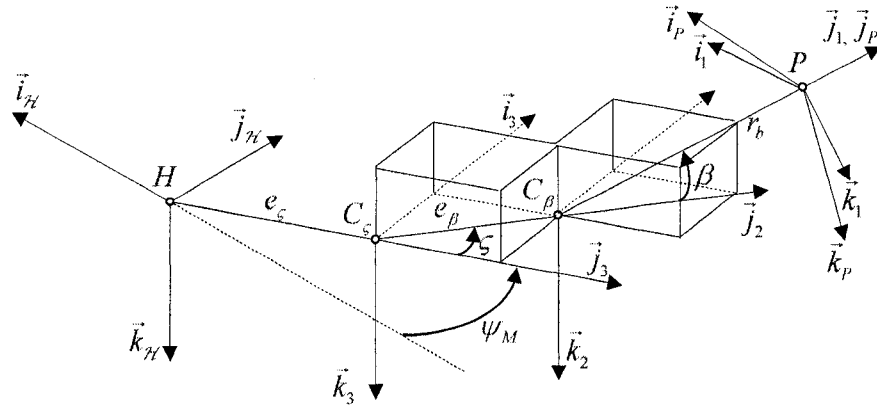


Figure 2.8 Définition des repères "traînée", "battement" et "pas cyclique" pour un rotor articulé

Pour un rotor articulé, supposons l'ordonnance des articulations suivante : "traînée", "battement" et "pas cyclique". La position d'un point $\underline{r}_r^{(P)}$ dans le repère principal est transposée dans le repère "corps" par la relation suivante :

$$\underline{r}_r^{(R)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_\xi \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) & 0 \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rot}(\xi)} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_\beta \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}}_{\text{Rot}(\beta)} \underline{r}_r^{(P)} \right) \right\} \quad (2.26)$$

$$\underline{r}_r^{(B)} = \text{Rot}_{B \leftarrow H} \underline{r}_r^{(H)} = \left(\text{Rot}_{H \leftarrow B} \right)^T \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(\psi_M) & -\cos(\psi_M) & 0 \\ \cos(\psi_M) & \sin(\psi_M) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rot}(\psi_M)} \underline{r}_r^{(R)}$$

où ε_ξ et ε_β sont les décalages des charnières. Pour $\underline{r}_r^{(P)} = [0 \quad r_b \quad 0]^T$

$$\underline{r}_r^{(H)} = \begin{bmatrix} -(\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta)) \cos(\psi_M + \xi) - \varepsilon_\xi \cos(\psi_M) \\ (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta)) \sin(\psi_M + \xi) - \varepsilon_\xi \sin(\psi_M) \\ -r_b \sin(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

La vitesse d'un point de la pale dans le repère fixe "moyeu" est calculée par (2.28).

$$\begin{aligned}\underline{V}_r^{(\mathcal{H})} &= \underline{V}_H^{(\mathcal{H})} + \frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) + \underline{\omega}_{\mathcal{H}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_r^{(\mathcal{H})} = \\ &= \text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{B}} \left[\underbrace{\underline{V}_{bi}^{(\mathcal{B})} + (\underline{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_{bh}^{(\mathcal{B})})}_{\underline{V}_H^{(\mathcal{B})}} \right] + \frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) + \text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{B}} \underline{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_r^{(\mathcal{H})}\end{aligned}\quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) &= \left\{ \frac{\partial(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial t} + \frac{\partial(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \psi_M} \frac{d\psi_M}{dt} + \frac{\partial(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dt} \right\} \\ \underline{\omega}_{\mathcal{H}/\mathcal{I}} &= \text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{B}} \underline{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}\end{aligned}\quad (2.29)$$

Pour le point $\underline{r}_r^{(\mathcal{P})} = [0 \quad r_b \quad 0]^T$, la relation (2.29) prend la forme (2.30).

$$\frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_\zeta \Omega_M \sin(\psi_M) + r_b \dot{\beta} \sin(\beta) \cos(\psi_M + \zeta) + (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta))(\Omega_M + \dot{\zeta}) \sin(\psi_M + \zeta) \\ \varepsilon_\zeta \Omega_M \cos(\psi_M) - r_b \dot{\beta} \sin(\beta) \sin(\psi_M + \zeta) + (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta))(\Omega_M + \dot{\zeta}) \cos(\psi_M + \zeta) \\ -r_b \cos(\beta) \dot{\beta} \end{bmatrix}\quad (2.30)$$

L'accélération d'un point de la pale dans le repère fixe "moyeu" est calculée par (2.31).

$$\begin{aligned}\underline{\ddot{a}}_r^{(\mathcal{H})} &= \underline{\ddot{a}}_H^{(\mathcal{H})} + \frac{d^2}{dt^2}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) + \underline{\ddot{\omega}}_{\mathcal{H}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_r^{(\mathcal{H})} + \frac{d}{dt}(\underline{\omega}_{\mathcal{H}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) \\ \underline{a}_r^{(\mathcal{H})} &= \text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{B}} \left[\underbrace{\underline{\dot{V}}_{bi}^{(\mathcal{B})} + (\underline{\dot{\omega}}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_{bh}^{(\mathcal{B})}) + \underline{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times (\underline{V}_{bi}^{(\mathcal{B})} + \underline{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_{bh}^{(\mathcal{B})})}_{\underline{\ddot{a}}_H^{(\mathcal{B})}} \right] +\end{aligned}\quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{d^2}{dt^2}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) + \text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{B}} \left[\underline{\dot{\omega}}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_r^{(\mathcal{H})} + 2 \underline{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) + \underline{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times (\underline{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) \right] \\ \frac{d^2}{dt^2}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})}) + \frac{\frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \psi_M} \frac{d\psi_M}{dt} + \frac{\frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \Omega_M} \frac{d\Omega_M}{dt} + \frac{\frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} + \\ &+ \frac{\frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \dot{\zeta}} \frac{d\dot{\zeta}}{dt} + \frac{\frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dt} + \frac{\frac{d}{dt}(\underline{r}_r^{(\mathcal{H})})}{\partial \dot{\beta}} \frac{d\dot{\beta}}{dt} \end{aligned} \right\}\end{aligned}\quad (2.32)$$

Soit l'énergie cinétique E_K d'un élément de pale à distance $\underline{r}_r^{(H)}$:

$$E_K = \frac{1}{2} \int_0^{r_M} \vec{V}_r^{(H)} \cdot \vec{V}_r^{(H)} dm = \frac{1}{2} \int_0^{r_M} (\underline{V}_r^{(H)})^T \underline{V}_r^{(H)} dm \quad (2.33)$$

Pour une distribution uniforme de la masse de la pale $dm = m_p dr_r$, en utilisant l'approche énergétique de Lagrange, la dynamique de battement et de traînée peut être calculée à partir de l'équation générale de la dynamique (2.34) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial \beta} + \frac{\partial E_p}{\partial \beta} + \frac{\partial E_D}{\partial \beta} &= Q_\beta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial \zeta} + \frac{\partial E_p}{\partial \zeta} + \frac{\partial E_D}{\partial \zeta} &= Q_\zeta \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec Q_β , Q_ζ la force généralisée (moment dans notre cas) calculée à partir du travail virtuel des forces externes dans la direction de déplacement en battement et en traînée et E_p et E_D respectivement énergie potentielle et fonction de dissipation. Chaque équation (2.34) peut être vue comme une expression de l'équation générale de la dynamique dans la direction de la variation de la coordonnée de battement et celle de la traînée. Étant donné que la distribution de la masse de la pale est indépendante aux dérivées par rapport au temps et aux dérivées partielles, l'ordre de l'intégration et la dérivation peut être changée.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial \beta} &= \int_0^{r_M} \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{V}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\dot{\underline{r}}_r^{(H)})}{\partial \dot{\beta}} \right) - \vec{V}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\vec{V}_r^{(H)})}{\partial \beta} \right) dm \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial \zeta} &= \int_0^{r_M} \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{V}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\dot{\underline{r}}_r^{(H)})}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \vec{V}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\vec{V}_r^{(H)})}{\partial \zeta} \right) dm \end{aligned} \quad (2.35)$$

En réalité selon (2.28) et (2.29), les dérivées partielles par rapport à $\{\dot{\beta} \quad \dot{\zeta}\}$ sont :

$$\frac{\partial [\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)}]}{\partial \dot{\beta}} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial [\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)}]}{\partial \dot{\zeta}} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \zeta} \quad (2.36)$$

D'autre part, en prenant les dérivées partielles par rapport à $\{\beta \quad \zeta\}$ de l'identité (2.29), nous aurons (2.37) et par conséquent (2.38).

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)}]}{\partial \beta} &= \left\{ \frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial t \partial \beta} + \frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \psi_M \partial \beta} \frac{d\psi_M}{dt} + \frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \zeta \partial \beta} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial^2 \beta} \frac{d\beta}{dt} \right\} \\ \frac{\partial [\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)}]}{\partial \zeta} &= \left\{ \frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial t \partial \zeta} + \frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \psi_M \partial \zeta} \frac{d\psi_M}{dt} + \frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial^2 \zeta} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \beta \partial \zeta} \frac{d\beta}{dt} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial [\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)}]}{\partial \beta} = \frac{d \left[\frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \beta} \right]}{dt}, \quad \frac{\partial [\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)}]}{\partial \zeta} = \frac{d \left[\frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \zeta} \right]}{dt} \quad (2.38)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_r^{(H)})}{\partial \beta} \right) - \bar{\mathbf{V}}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)})}{\partial \beta} &= \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \beta} \right) - \bar{\mathbf{V}}_r^{(H)} \cdot \frac{d \left[\frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \beta} \right]}{dt} = \frac{d (\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)})}{dt} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \beta} \\ \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_r^{(H)})}{\partial \zeta} \right) - \bar{\mathbf{V}}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)})}{\partial \zeta} &= \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \zeta} \right) - \bar{\mathbf{V}}_r^{(H)} \cdot \frac{d \left[\frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \zeta} \right]}{dt} = \frac{d (\bar{\mathbf{V}}_r^{(H)})}{dt} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_r^{(H)})}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Soit les moments d'inertie

$$I_\beta = \int_{e_\beta + e_\beta}^{r_M} r_r^2 dm = \int_{e_\beta + e_\beta}^{r_M} m_p r_r^2 dr_r ; \quad M_\beta = \int_{e_\beta + e_\beta}^{r_M} m_p r_r dr_r ; \quad m_\beta = \int_{e_\beta + e_\beta}^{r_M} m_p dr_r \quad (2.40)$$

Alors la dynamique de battement et de traînée est calculée comme :

$$\begin{aligned}
I_\beta \ddot{\beta} = & M_\beta \sin(\beta) \left\{ (\dot{V}_h + R_h U_h - P_h W_h) \sin(\psi_M + \varsigma) - (\dot{U}_h - R_h V_h + Q_h W_h) \cos(\psi_M + \varsigma) + \right. \\
& + \varepsilon_\varsigma \left[\dot{\Omega}_M \sin(\varsigma) - (\Omega_M^2 - 2 \Omega_M R_h) \cos(\varsigma) \right] - \varepsilon_\beta \left[(\Omega_M + \dot{\varsigma})^2 - 2 R_h (\Omega_M + \dot{\varsigma}) \right] + \\
& + [l_h - \varepsilon_\varsigma \cos(\psi_M) - \varepsilon_\beta \cos(\psi_M + \varsigma)] \left[(\dot{R}_h + P_h Q_h) \sin(\psi_M + \varsigma) + (Q_h^2 + R_h^2) \cos(\psi_M + \varsigma) \right] + \\
& + [b_h + \varepsilon_\varsigma \sin(\psi_M) + \varepsilon_\beta \sin(\psi_M + \varsigma)] \left[(\dot{R}_h - P_h Q_h) \cos(\psi_M + \varsigma) - (Q_h^2 + R_h^2) \sin(\psi_M + \varsigma) \right] - \\
& - h_h \left[(\dot{P}_h - Q_h R_h) \sin(\psi_M + \varsigma) + (\dot{Q}_h + P_h R_h) \cos(\psi_M + \varsigma) \right] \Big\} + \\
& M_\beta \cos(\beta) \left\{ \dot{W}_h + P_h V_h - Q_h U_h + 2 P_h [\varepsilon_\varsigma \Omega_M \cos(\psi_M) + \varepsilon_\beta (\Omega_M + \dot{\varsigma}) \cos(\psi_M + \varsigma)] - \right. \\
& - 2 Q_h [\varepsilon_\varsigma \Omega_M \sin(\psi_M) + \varepsilon_\beta (\Omega_M + \dot{\varsigma}) \sin(\psi_M + \varsigma)] - (\dot{Q}_h - P_h R_h) [l_h - \varepsilon_\varsigma \cos(\psi_M) - \\
& - \varepsilon_\beta \cos(\psi_M + \varsigma)] + (\dot{P}_h + Q_h R_h) [b_h + \varepsilon_\varsigma \sin(\psi_M) + \varepsilon_\beta \sin(\psi_M + \varsigma)] - h_h (P_h^2 + Q_h^2) \Big\} + \\
& + I_\beta \left\{ [\dot{P}_h + Q_h R_h \cos(2\beta)] \sin(\psi_M + \varsigma) + [\dot{Q}_h - P_h R_h \cos(2\beta)] \cos(\psi_M + \varsigma) \right\} + \\
& I_\beta \cos(\beta) \sin(\beta) \left\{ P_h^2 + Q_h^2 - [P_h \sin(\psi_M + \varsigma) + Q_h \cos(\psi_M + \varsigma)]^2 - (R_h - \Omega_M - \dot{\varsigma})^2 \right\} + \\
& 2 I_\beta \cos^2(\beta) (\Omega_M + \dot{\varsigma}) [P_h \cos(\psi_M + \varsigma) - Q_h \sin(\psi_M + \varsigma)] + Q_\beta
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varsigma} (I_\beta \cos^2(\beta) + 2 \varepsilon_\beta M_\beta \cos(\beta) + \varepsilon_\varsigma^2 m_\beta) = & (\dot{R}_h - \dot{\Omega}_M) (I_\beta \cos^2(\beta) + 2 \varepsilon_\beta M_\beta \cos(\beta) + \varepsilon_\varsigma^2 m_\beta) - \\
& - (M_\beta \cos(\beta) + \varepsilon_\varsigma m_\beta) \left\{ (\dot{U}_h - R_h V_h + Q_h W_h) \sin(\psi_M + \varsigma) + (\dot{V}_h + R_h U_h - P_h W_h) \cos(\psi_M + \varsigma) + \right. \\
& + l_h [(\dot{R}_h + P_h Q_h) \cos(\psi_M + \varsigma) - (Q_h^2 + R_h^2) \sin(\psi_M + \varsigma)] - b_h [(\dot{R}_h - P_h Q_h) \sin(\psi_M + \varsigma) + \\
& + (P_h^2 + R_h^2) \cos(\psi_M + \varsigma)] - h_h [(\dot{P}_h - Q_h R_h) \cos(\psi_M + \varsigma) - (\dot{Q}_h - P_h R_h) \sin(\psi_M + \varsigma)] - \\
& - \varepsilon_\beta [P_h Q_h \cos(2\psi_M + 2\varsigma) + \frac{1}{2} (P_h^2 - Q_h^2) \sin(2\psi_M + 2\varsigma)] - \varepsilon_\varsigma [(\dot{\Omega}_M - \dot{R}_h) \cos(\varsigma) + \\
& + (\Omega_M - R_h)^2 \sin(\varsigma) - P_h Q_h \cos(2\psi_M + \varsigma) - P_h^2 \sin(\psi_M) \cos(\psi_M + \varsigma) + \\
& + Q_h^2 \cos(\psi_M) \sin(\psi_M + \varsigma)] \Big\} - (I_\beta \cos(\beta) + \varepsilon_\beta M_\beta) \left\{ \sin(\beta) [2 \dot{\beta} (R_h - \Omega_M - \dot{\varsigma}) + \right. \\
& + (\dot{P}_h - Q_h R_h) \cos(\psi_M + \varsigma) - (\dot{P}_h - Q_h R_h) \cos(\psi_M + \varsigma)] - \cos(\beta) [\dot{R}_h + P_h Q_h \cos(2\psi_M + 2\varsigma) + \\
& + \frac{1}{2} (P_h^2 - Q_h^2) \sin(2\psi_M + 2\varsigma) - 2 \dot{\beta} [P_h \cos(\psi_M + \varsigma) - Q_h \sin(\psi_M + \varsigma)]] \Big\} + Q_\varsigma
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Soit

$$I_{\zeta} = \int_{e_{\zeta}}^{e_{\beta}} r_{\zeta}^2 . dm = \quad ; \quad M_{\zeta} = \int_{e_{\zeta}}^{e_{\beta}} r_{\zeta} . dm \quad (2.43)$$

Pour compléter le modèle de traînée, nous devons introduire la dynamique du segment entre l'articulation de traînée et celle de battement. La dynamique résultante est calculée de manière similaire au développement précédent.

Alors la dynamique complémentaire de traînée est calculée par l'expression (2.44) et doit être ajoutée à l'expression (2.42).

$$\begin{aligned} I_{\zeta} \ddot{\zeta} = I_{\zeta} & \left[\dot{R}_h - \dot{\Omega}_M + P_h Q_h \cos(2\psi_M + 2\zeta) + \frac{1}{2}(P_h^2 - Q_h^2) \sin(2\psi_M + 2\zeta) \right] - \\ & - M_{\zeta} \left\{ (\dot{U}_h - R_h V_h + Q_h W_h) \sin(\psi_M + \zeta) + (\dot{V}_h + R_h U_h - P_h W_h) \cos(\psi_M + \zeta) + \right. \\ & + l_h \left[(\dot{R}_h + P_h Q_h) \cos(\psi_M + \zeta) - (Q_h^2 + R_h^2) \sin(\psi_M + \zeta) \right] - b_h \left[(\dot{R}_h - P_h Q_h) \sin(\psi_M + \zeta) + \right. \\ & + (P_h^2 + R_h^2) \cos(\psi_M + \zeta) \left. \right] - h_h \left[(\dot{P}_h - Q_h R_h) \cos(\psi_M + \zeta) - (\dot{Q}_h - P_h R_h) \sin(\psi_M + \zeta) \right] + \\ & + \varepsilon_{\zeta} \left[(\dot{\Omega}_M - \dot{R}_h) \cos(\zeta) + (\Omega_M - R_h)^2 \sin(\zeta) - P_h Q_h \cos(2\psi_M + \zeta) - P_h^2 \sin(\psi_M) \cos(\psi_M + \zeta) + \right. \\ & \left. + Q_h^2 \cos(\psi_M) \sin(\psi_M + \zeta) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Les forces généralisées Q_{β} et Q_{ζ} , associées à la dynamique de battement et de traînée, contiennent les composantes de la force de gravité, des forces aérodynamiques, de la force de l'amortisseur de traînée et de la force potentielle de ressort. La présence et les paramètres des deux dernières forces dépendent du design du rotor principal et sont ajoutées pour généraliser le modèle. Le développement des forces généralisées est fait par le biais du travail virtuel dans la direction de déplacement virtuel en battement et en traînée. Soit δW le travail virtuel élémentaire de la force externe $\vec{F}^{(H)}$:

$$\begin{aligned} \delta W = \Delta \vec{F}^{(H)} \cdot \delta(\vec{r}_r^{(H)}) = \Delta \vec{F}_\beta^{(H)} \cdot \left[\frac{\partial(\vec{r}_r^{(H)})}{\partial \beta} \delta \beta \right] + \Delta \vec{F}_\zeta^{(H)} \cdot \left[\frac{\partial(\vec{r}_r^{(H)})}{\partial \zeta} \delta \zeta \right] = \Delta Q_\beta \delta \beta + \Delta Q_\zeta \delta \zeta \\ \Delta \vec{F}_\beta^{(H)} = \Delta \vec{F}_{\beta,G}^{(H)} + \Delta \vec{F}_{\beta,A}^{(H)} + \Delta \vec{F}_{\beta,D}^{(H)} + \Delta \vec{F}_{\beta,K}^{(H)} ; \Delta \vec{F}_\zeta^{(H)} = \Delta \vec{F}_{\zeta,G}^{(H)} + \Delta \vec{F}_{\zeta,A}^{(H)} + \Delta \vec{F}_{\zeta,D}^{(H)} + \Delta \vec{F}_{\zeta,K}^{(H)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

En sommant le travail virtuel élémentaire (2.45), on obtient le travail virtuel total :

$$W = \int_0^{2\pi} (Q_\beta \delta \beta + Q_\zeta \delta \zeta) d\psi_M ; Q_\beta = \int_0^{r_M} \frac{\Delta \vec{F}^{(H)}}{\Delta r} \cdot \frac{\partial(\vec{r}_r^{(H)})}{\partial \beta} dr, Q_\zeta = \int_0^{r_M} \frac{\Delta \vec{F}^{(H)}}{\Delta r} \cdot \frac{\partial(\vec{r}_r^{(H)})}{\partial \zeta} dr \quad (2.46)$$

Les composantes de la force de gravité dans le repère moyeu peuvent être calculées par la transformation suivante :

$$\underline{F_G^{(H)}} = \text{Rot}_{H \leftarrow B} \text{Rot}_{B \leftarrow I} \underline{g} dm \quad (2.47)$$

Pour $\Phi_h = 0$ et une distribution uniforme de la masse :

$$\underline{dF_G^{(H)}} = m_p g \begin{bmatrix} -\cos(\Theta_h) \sin(\Theta_b) + \sin(\Theta_h) \cos(\Theta_b) \cos(\Phi_b) \\ \cos(\Theta_b) \sin(\Phi_b) \\ \sin(\Theta_h) \sin(\Theta_b) + \cos(\Theta_h) \cos(\Theta_b) \cos(\Phi_b) \end{bmatrix} dr_r \quad (2.48)$$

De (2.26), le déplacement virtuel dans le repère fixe "moyeu" d'un élément de pale est :

$$\begin{aligned} \delta_1(\vec{r}_r^{(H)}) = \frac{\partial(\vec{r}_b^{(H)})}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial(\vec{r}_b^{(H)})}{\partial \zeta} \delta \zeta \\ \delta_1(\underline{r}_r^{(H)}) = \begin{bmatrix} r_b \sin(\beta) \cos(\psi_M + \zeta) \\ -r_b \sin(\beta) \sin(\psi_M + \zeta) \\ -r_b \cos(\beta) \end{bmatrix} \delta \beta + \begin{bmatrix} (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta)) \sin(\psi_M + \zeta) \\ (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta)) \cos(\psi_M + \zeta) \\ 0 \end{bmatrix} \delta \zeta \end{aligned} \quad (2.49)$$

Comme le déplacement virtuel du segment de la pale entre le moyeu et la première articulation est indépendant de la dynamique de battement et de traînée, alors :

$$\delta_2(\underline{r}_r^{(H)}) = \begin{bmatrix} r_\zeta \sin(\psi_M + \zeta) \\ r_\zeta \cos(\psi_M + \zeta) \\ 0 \end{bmatrix} \delta\zeta \quad (2.50)$$

$$\delta(\underline{r}_r^{(H)}) = \delta_1(\underline{r}_r^{(H)}) + \delta_2(\underline{r}_r^{(H)}) = \frac{\partial(\underline{r}_b^{(H)})}{\partial\beta} \delta\beta + \left[\frac{\partial(\underline{r}_b^{(H)})}{\partial\zeta} + \frac{\partial(\underline{r}_\zeta^{(H)})}{\partial\zeta} \right] \delta\zeta \quad (2.51)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\beta,G}^{(H)} &= g M_\beta \left\{ \left[(-C_{\Theta_h} S_{\Theta_b} + S_{\Theta_h} C_{\Theta_b} C_{\Phi_b}) \cos(\psi_M + \zeta) - C_{\Theta_b} S_{\Phi_b} \sin(\psi_M + \zeta) \right] \sin(\beta) - \right. \\ &\quad \left. - [S_{\Theta_h} S_{\Theta_b} + C_{\Theta_h} C_{\Theta_b} C_{\Phi_b}] \cos(\beta) \right\} \\ \mathbb{Q}_{\zeta,G}^{(H)} &= g (m_\beta + m_\zeta + M_\beta \cos(\beta)) \left[(-C_{\Theta_h} S_{\Theta_b} + S_{\Theta_h} C_{\Theta_b} C_{\Phi_b}) \sin(\psi_M + \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + C_{\Theta_b} S_{\Phi_b} \cos(\psi_M + \zeta) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

Remarque : Selon la convention utilisée, l'angle Θ_h est positif dans le sens de $(-\vec{j}_f)$.

Pour le modèle d'hélicoptère étudiée ($\Theta_h = 3^\circ$).

Comme nous l'avons énoncé dans le chapitre précédent, deux causes fondamentales sont à la source des forces aérodynamiques, que subit chaque pale au cours de son mouvement :

- La distribution de la pression, s'exerçant selon la normale sur la surface de la pale;
- La distribution des efforts de frottement (contrainte de cisaillement) selon la tangente au profil de la pale.

L'intégration des distributions de la pression et des efforts de frottement sur la surface complète de chaque pale conduit à une résultante aérodynamique, proportionnelle au carré de la vitesse relative de la pale par rapport à l'air ambiant. Cette vitesse est la

somme vectorielle de la vitesse de translation de l'hélicoptère, la vitesse périphérique de rotation du rotor et de la vitesse induite par l'accélération de la masse d'air.

Les charges aérodynamiques sont en général variables, non linéaires et tridimensionnels. En suivant le développement théorique, notre première approximation néglige ces effets et suppose que les approximations (ci-dessous) mènent à une prévision raisonnable du comportement global du rotor.

S6. La poussée du rotor est une fonction linéaire d'incidence locale de la pale et la force de résistance (traînée) est une fonction quadratique du coefficient de portance. Les coefficients de poussée et de traînée sont fonctions de l'angle local d'incidence (α_r) et du nombre de Mach ($Mach_r$). Négliger le décrochage et la compressibilité de la pale peut avoir un effet significatif sur la fidélité de la prévision du comportement dynamique lors du vol avec un taux d'avancement élevé. Sans un modèle de ces effets, le rotor pourra continuer de développer une force de poussée et petite force de traînée au delà de la frontière de décrochage, ce qui est clairement peu réaliste. La supposition de la pente constante de la courbe de portance néglige les variations linéaires, dues aux effets de compressibilité, le long de l'envergure et en fonction de la position de la pale dans le plan de rotation du rotor. Le coefficient de portance C_L constant peut être expliqué dans une certaine mesure par une pente médiane de la courbe de portance, en particulier à basse vitesse. Les variations azimutales provoquées par les changements des angles de pas cycliques et collectifs en vol d'équilibre ne peuvent non plus être simulées avec le modèle linéaire à coefficients constants.

S7. Certains effets aérodynamiques fréquentiels sont ignorés. Ces effets aérodynamiques peuvent être divisés en deux catégories – celle qui implique le calcul de la réponse de la force de poussée et du moment de tangage de la pale aux changements de l'incidence locale, alors que l'autre implique le

calcul de l'incidence locale due aux variations des vitesses de sillage de rotor. Tous les deux exigent des degrés de liberté additionnels. Néanmoins, les effets du sillage sont expliqués d'une façon relativement élémentaire, mais opérationnelle par la théorie de la vitesse induite, décrite dans cette section, le développement de la force de poussée et du moment de tangage de la pale en fonction de l'angle d'incidence sont ignorés, introduisant comme résultat un simple déphasage de la réponse du rotor aux perturbations externes.

S8. Les pertes de portance à l'extrémité et à l'implanture de la pale sont ignorées. La force de poussée réduit à zéro aux deux extrémités de la partie opérationnelle de la pale. Un facteur de perte de l'extrémité de 3% de r_M ou une intégration des charges entre la racine et l'extrémité opérants est généralement employé. Les deux effets sont petits et expliquent seulement quelques pourcent du fonctionnement et de la réponse du rotor. La modélisation de ces pertes augmente la longueur des équations de manière significative et dans l'analyse qui suit, nous omettons donc ces pertes. Cependant, pour réaliser des prévisions précises sur la puissance requise, par exemple, elles doivent être incluses.

S9. La distribution axiale (le long de l'envergure) de la vitesse induite est uniforme. Cette supposition est une simplification forte, même dans le cas de vol en palier, à cause des effets complexes du sillage de rotor, mais fournit une approximation très correcte pour la prévision de la puissance et la poussée du rotor. L'usage de la distribution uniforme de la vitesse induite provient de la supposition que le rotor est conçu pour développer la traînée induite minimale, et par conséquent que la pale a la torsion idéale. Dans ce cas idéal, la circulation serait constante le long de l'envergure de la pale, avec les seules pertes induites provenant des tourbillons (vortex) de l'extrémité de la pale. La torsion idéale, pour une pale de corde constante est inversement proportionnelle au rayon du rotor, tandis que sur la plupart des hélicoptères,

on trouve une torsion linéaire qui donne une approximation raisonnable, sinon aussi bonne que la torsion idéale, aux effets de distribution de la vitesse induite.

S10. Les effets de flux inverse sont ignorés. La région d'écoulement inverse prend la forme d'un petit disque du côté de la pale reculant, où la circulation d'air frappe le bord de fuite de la pale plutôt que le bord d'attaque. Jusqu'au taux d'avancement modéré ($\mu < 0,3$), cette région est petite et les pressions dynamiques associées basses, justifiant son omission dans l'analyse des forces de rotor. À des vitesses plus élevées, l'importance de région d'écoulement inverse augmente, ayant pour résultat un pas collectif additif requis pour fournir la poussée nécessaire du rotor, mais diminuer la traînée du profil et par conséquent le couple du rotor.

Ces approximations nous permettent de dériver les charges aérodynamiques d'une manière analytique. Afin d'établir les expressions des forces aérodynamiques de portance et de traînée, nous considérons un élément différentiel de pale figure 2.9 :

$$\begin{aligned}\Delta L(\psi_M, r_b)^{(P)} &= \underbrace{\frac{1}{2} \rho (u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2)}_{q_p} c \Delta r C_L = \frac{1}{2} \rho (u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2) c \Delta r a \alpha_r, \\ \Delta D(\psi_M, r_b)^{(P)} &= \underbrace{\frac{1}{2} \rho (u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2)}_{q_p} c \Delta r C_D; \quad C_D = k_{D_0} + k_{D_1} C_T^2 \quad (2.53) \\ \alpha_r &= [\theta_0(\psi_M) + \theta_1(r_b) - K_1 \beta - K_2 \zeta] + \phi_r; \quad \phi_r = \tan^{-1} \left(\frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \right) \approx \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}}\end{aligned}$$

où $\Delta L^{(P)}$ et $\Delta D^{(P)}$ est la force élémentaire, respectivement de poussée et de traînée, ρ , est la masse volumique de l'air, c , est la longueur de la corde, a , est le gradient de la portance, C_L et C_D sont respectivement les coefficients de poussée et de traînée, α_r est

l'angle effectif d'incidence, $\underline{V}_r^{(P)} = \begin{bmatrix} u_{\perp} \\ u_r \\ u_{\parallel} \end{bmatrix}$ est le vecteur de la vitesse locale, C_T est le

coefficient de portance, $\theta_r(\psi_M, r_b)$ est l'angle de pas et $\theta_l(r_b)$ est la torsion linéaire.

Pour le calcul des éléments de la vitesse relative à la masse d'air, nous devons additionner les contributions de la vitesse induite et de la vitesse du vent à l'expression (2.28).

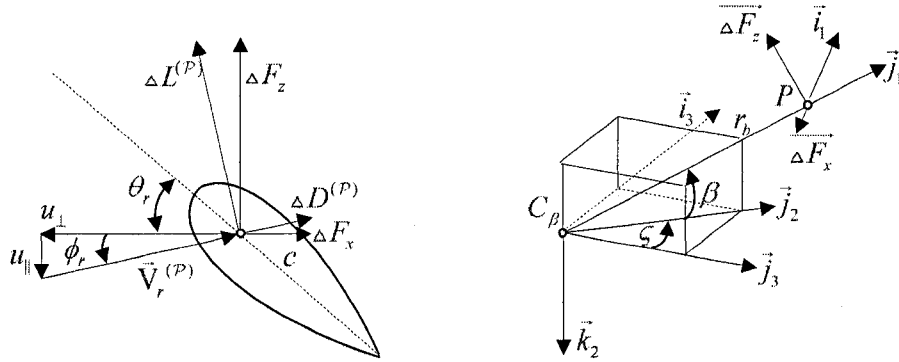


Figure 2.9 Définition de la portance et de la traînée d'un élément de pale dans des repères locaux

Soit $\underline{v}_r^{(H)}$ la vitesse additionnelle, alors la vitesse locale est :

$$\underline{V}_r^{(P)} = \text{Rot}_{P \leftarrow H} \left(\underline{V}_H^{(H)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}^{(H)} \right) \quad (2.54)$$

La portance et la traînée d'un élément de pale dans le repère de la pale sont :

$$\begin{bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_r) & -\sin(\phi_r) \\ \sin(\phi_r) & \cos(\phi_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D^{(P)} \\ \Delta L^{(P)} \end{bmatrix} ; \phi_r = \tan^{-1} \left(\frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \right) \quad (2.55)$$

Dans l'expression de (2.55), le premier terme ΔF_x est la somme de la force élémentaire de traînée induite et de la force élémentaire de traînée du profil. Exprimées dans le repère fixe, les forces aérodynamiques d'un élément de pale sont :

$$\Delta \mathbf{F}_A^{(\mathcal{H})} = \begin{bmatrix} \sin(\psi_M) & -\cos(\psi_M) & 0 \\ \cos(\psi_M) & \sin(\psi_M) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\zeta) & \sin(\zeta) & 0 \\ -\sin(\zeta) & \cos(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta F_x \\ -\Delta F_z \sin(\beta) \\ -\Delta F_z \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Selon (2.51) (2.53) et (2.56)

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_A}{\delta \beta} &= \Delta \mathbb{Q}_{\beta, A}^{(\mathcal{H})} = \Delta \vec{F}_A^{(\mathcal{H})} \cdot \frac{\partial (\vec{r}_b^{(\mathcal{H})})}{\partial \beta} = (\Delta \mathbf{F}_A^{(\mathcal{H})})^T \begin{bmatrix} r_b \sin(\beta) \cos(\psi_M + \delta) \\ -r_b \sin(\beta) \sin(\psi_M + \delta) \\ -r_b \cos(\beta) \end{bmatrix} = \Delta F_z r_b \\ \frac{\delta W_A}{\delta \zeta} &= \Delta \mathbb{Q}_{\zeta, A}^{(\mathcal{H})} = \Delta \vec{F}_A^{(\mathcal{H})} \cdot \left[\frac{\partial (\vec{r}_b^{(\mathcal{H})})}{\partial \zeta} + \frac{\partial (\vec{r}_\zeta^{(\mathcal{H})})}{\partial \zeta} \right] = (\Delta \mathbf{F}_A^{(\mathcal{H})})^T \begin{bmatrix} (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta) + r_\zeta) \sin(\psi_M + \delta) \\ (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta) + r_\zeta) \cos(\psi_M + \delta) \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= -\Delta F_x (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta) + r_\zeta) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\beta, A}^{(\mathcal{H})} &= \int_{\varepsilon_\zeta + \varepsilon_\beta}^{r_M} \frac{\Delta F_z}{\Delta r} r dr = \int_{\varepsilon_\zeta + \varepsilon_\beta}^{r_M} \frac{1}{2} \rho (u_\perp^2 + u_\parallel^2) c [C_L \cos(\phi_r) + C_D \sin(\phi_r)] r_b dr_b \\ \mathbb{Q}_{\zeta, A}^{(\mathcal{H})} &= \int_{\varepsilon_\zeta + \varepsilon_\beta}^{r_M} -\frac{\Delta F_x (\varepsilon_\beta + r \cos(\beta))}{\Delta r} dr + \int_{\varepsilon_\zeta}^{\varepsilon_\beta} -\frac{\Delta F_x}{\Delta r} r dr = \\ &= \int_{\varepsilon_\zeta + \varepsilon_\beta}^{r_M} \frac{1}{2} \rho (u_\perp^2 + u_\parallel^2) c [C_L \sin(\phi_r) - C_D \cos(\phi_r)] (\varepsilon_\beta + r_b \cos(\beta)) dr_b + \\ &+ \int_{\varepsilon_\zeta}^{\varepsilon_\beta} \frac{1}{2} \rho (u_\perp^2 + u_\parallel^2) c [C_L \sin(\phi_r) - C_D \cos(\phi_r)] r_\zeta dr_\zeta \end{aligned} \quad (2.58)$$

L'intégration des forces aérodynamiques peut être obtenue de façon analytique ou numérique. L'approche numérique consiste à segmenter la pale en sections (entre cinq et

quinze) et calculer les forces aérodynamiques à partir des données numériques sur les facteurs de portance et de traînée.

L'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D correspondent à la force de rappel d'un ressort et à la force de frottement visqueux d'un amortisseur. Leur présence est optionnelle. D'une manière générale :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} K_\beta \beta^2 + \frac{1}{2} K_\varsigma \varsigma^2 \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial \beta} + \frac{\partial E_D}{\partial \beta} = K_\beta \beta + C_\beta \dot{\beta} \\ E_D &= \frac{1}{2} C_\beta \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} C_\varsigma \dot{\varsigma}^2 \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial \beta} + \frac{\partial E_D}{\partial \beta} = K_\beta \beta + C_\beta \dot{\beta} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\Delta F_{K,D}^{(H)} = \begin{bmatrix} \sin(\psi_M) & -\cos(\psi_M) & 0 \\ \cos(\psi_M) & \sin(\psi_M) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_\beta \beta - C_\beta \dot{\beta} \\ 0 \\ -K_\varsigma \varsigma - C_\varsigma \dot{\varsigma} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

2.5.2 Les équations de battement des pales dans le repère "moyeu - vent". Modèle aérodynamique équivalent de deuxième ordre.

Dans cette section, l'équation du mouvement de battement est explicitement dérivée pour un modèle de moyeu sans décalage entre les charnières $\varepsilon_\beta = 0$, ignorant la dynamique de traînée $\varsigma = 0$; $\dot{\varsigma} = 0$, Les principaux paramètres du modèles sont : la rigidité de la charnière K_β , le décalage effectif $\bar{\varepsilon} = \varepsilon / r_M$, le nombre de Lock (γ_{Lock}) et le couplage angle de pas – angle de battement $K_1 = \tan(\delta_3)$. Le nombre de Lock est un paramètre important, exprimant le taux entre les forces aérodynamiques et inertielles agissant sur la

pale $\gamma_{Lock} = \frac{\rho c a r_M^4}{I_\beta}$. Avant de développer les équations de battement, posons les

conditions simplificatrices suivantes :

- S11. La pale du rotor est rigide en torsion et présente une torsion linéaire initiale.

S12. L'angle de battement est supposé petit et le mouvement de battement vertical des pales, ainsi que l'angle de pas est approximé avec les harmoniques de premier ordre.

S13. Les effets du mouvement du corps sur la dynamique de battement du rotor sont limités à ceux dus à l'accélération angulaire $(\dot{P}_{wh} \quad \dot{Q}_{wh})$, à la vitesse angulaire $(P_{wh} \quad Q_{wh})$ et à l'accélération normale (verticale) (\dot{W}_{wh}) dans le repère moyeu - vent.

Avec un angle de glissement β_{hw} et α_{hw} l'angle d'incidence par rapport au plan du disque rotor, la vitesse linéaire de l'origine du repère moyeu - vent mobile dans le repère lui-même et la vitesse angulaire sont calculées comme :

$$\underline{V}_H^{(Wh)} = \begin{bmatrix} U_{hw} \\ V_{hw} \\ W_{hw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_h \cos(\beta_{hw}) + V_h \sin(\beta_{hw}) = \sqrt{U_h^2 + V_h^2} = \mu_h \Omega_M r_M \\ 0 \\ \underbrace{|V_H| \sin(\alpha_{hw})}_{W_h} + v(\psi_M) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\begin{bmatrix} P_{hw} \\ Q_{hw} \\ R_{hw} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\beta_{hw}) & \sin(\beta_{hw}) & 0 \\ -\sin(\beta_{hw}) & \cos(\beta_{hw}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rot}_{Wh \leftarrow Wh}} \begin{bmatrix} P_h \\ Q_h \\ R_h + \dot{\beta}_{hw} \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} \cos(\beta_{hw}) &= \frac{U_h}{\sqrt{U_h^2 + V_h^2}} \\ \sin(\beta_{hw}) &= \frac{V_h}{\sqrt{U_h^2 + V_h^2}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\beta_{hw} = \tan^{-1} \left(\frac{V_h}{U_h} \right); \quad \alpha_{hw} = \tan^{-1} \left(\frac{W_h}{\sqrt{U_h^2 + V_h^2}} \right); \quad \dot{\beta}_{hw} = \frac{V_h^2}{U_h^2 + V_h^2} \frac{\dot{V}_h}{U_h} \quad (2.63)$$

En aéronautique, afin de faire la comparaison appropriée, la pratique courante est de rendre les variables non dimensionnelles. Ainsi, la vitesse locale non-dimensionnelle est calculée comme :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{U}}_r^{(P)} &= \begin{bmatrix} \bar{u}_\perp \\ \bar{u}_+ \\ \bar{u}_\parallel \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{V}_{rw}^{(P)}}{\Omega_M r_M} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}}_{\text{Rot}^{-1}(\beta)} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(\psi_M) & \cos(\psi_M) & 0 \\ -\cos(\psi_M) & \sin(\psi_M) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rot}^{-1}(\psi_M)} \left(\frac{\mathbf{V}_H^{(WH)}}{\Omega_M r_M} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu_r^{(WH)} + \text{Rot}_{WH \leftarrow H} \mathbf{R}_{H \leftarrow B} \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{r}_r^{(P)}}{\Omega_M r_M} \right) + \frac{\frac{d\beta}{dt} \times (\vec{r}_r^{(P)})}{\Omega_M r_M} \\
\bar{u}_\perp &= \underbrace{\frac{\sqrt{U_h^2 + V_h^2}}{\Omega_M r_M}}_{\mu} \sin(\psi_M) + \left(\frac{\varepsilon}{r_M} + \cos(\beta) \frac{r_b}{r_M} \right) - \frac{(\varepsilon + r_b)}{\Omega_M r_M} (R_h + \dot{\beta}_{hw}) \\
\bar{u}_+ &= - \underbrace{\frac{\sqrt{U_h^2 + V_h^2}}{\Omega_M r_M}}_{\mu} \sin(\psi_M) \cos(\beta) - \sin(\beta) \left\{ \underbrace{\frac{W_h - [\nu_0 + \nu_1(\psi_M)]}{\Omega_M r_M}}_{\lambda} \right\} - \\
&\quad \frac{\sin(\beta)(\varepsilon + r_b) \left\{ \sin(\psi_M) [P_h \cos(\beta_{hw}) + Q_h \sin(\beta_{hw})] + \cos(\psi_M) [-P_h \sin(\beta_{hw}) + Q_h \cos(\beta_{hw})] \right\}}{\Omega_M r_M} \\
\bar{u}_\parallel &= - \underbrace{\frac{\sqrt{U_h^2 + V_h^2}}{\Omega_M r_M}}_{\mu} \cos(\psi_M) \sin(\beta) - \frac{\dot{\beta} r_b}{\Omega_M r_M} + \cos(\beta) \left\{ \underbrace{\frac{W_h - [\nu_0 + \nu_1(\psi_M)]}{\Omega_M r_M}}_{\lambda} \right\} + \\
&\quad + \frac{\cos(\beta)(\varepsilon + r_b) \left\{ \sin(\psi_M) [P_h \cos(\beta_{hw}) + Q_h \sin(\beta_{hw})] + \cos(\psi_M) [-P_h \sin(\beta_{hw}) + Q_h \cos(\beta_{hw})] \right\}}{\Omega_M r_M}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Ici nous avons introduit l'expression $[\nu_0 + \nu_1(\psi_M)]$ pour la vitesse induite. Se référant à la figure 2.10, l'angle de battement $\beta_j(t)$ de la $j^{\text{ième}}$ pale peut être obtenu en sommant les moments par rapport à l'articulation des forces externes, exprimées dans le repère moyeu – vent.

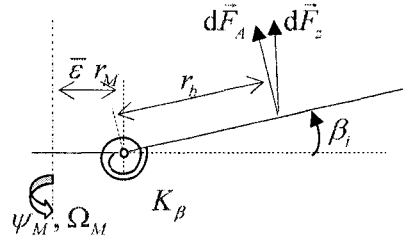


Figure 2.10 Modèle équivalent du rotor avec ressort

Le moment de la force aérodynamique par rapport à l'articulation est calculé comme :

$$M_A = \int_0^{r_M(1-\bar{\varepsilon})} r_b dF_A^{(WH)} = \int_0^{r_M(1-\bar{\varepsilon})} r_b \frac{\rho}{2} a c u_{\perp}^2 (\theta_r + \phi_r) dr_b \quad (2.65)$$

L'angle de pas θ_r peut être développé en série de Fourier en premier ordre dans le repère moyen fixe et a la forme :

$$\theta_r = \theta_0 + (\bar{\varepsilon} r_M + r_b) \theta_1 + \underbrace{\theta_c}_{-A_{lw}} \cos(\psi_M) + \underbrace{\theta_s}_{-B_{lw}} \sin(\psi_M) - \underbrace{\beta \tan(\delta_3)}_{K_1} \quad (2.66)$$

avec θ_1 angle de torsion initial et les entrées de commande angle de pas collectif θ_0 , angle de pas cyclique longitudinal B_{lc} et angle de pas cyclique latéral A_{lc} . La transformation (2.67) permet de calculer les variables d'entrée dans le repère moyen - vent fixe.

$$\begin{aligned} A_{lw} &= A_{lc} \cos(\beta_{hw}) - B_{lc} \sin(\beta_{hw}) \\ B_{lw} &= A_{lc} \sin(\beta_{hw}) + B_{lc} \cos(\beta_{hw}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

En supposant β petit et $(R_h + \hat{\beta}_h) \ll \Omega_M$ le moment de la force aérodynamique est :

$$\begin{aligned}
M_A = & \frac{1}{2} \rho a c r_M^4 \Omega_M^2 \left\{ \left[\frac{1}{4} - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{12} + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{2}{3} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{3} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right) \right] [\theta_0 - \right. \\
& - A_{i_w} \cos(\psi_M) - B_{i_w} \sin(\psi_M)] + \left[\frac{1}{5} - \frac{\bar{\varepsilon}}{4} + \frac{\bar{\varepsilon}^5}{20} + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{2}{3} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{3} \right. \right. \\
& \left. \left. + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{1}{2} - \frac{2\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\mu \sin(\psi_M)}{3} - \frac{\bar{\varepsilon} \mu \sin(\psi_M)}{2} \right) \right] \theta_1 + \left[\frac{1}{3} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{6} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right] \lambda - \\
& - \left[\frac{1}{4} - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{12} + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{2}{3} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{3} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right) \right] \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} + \\
& + \mu \left[\frac{1}{3} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{6} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right] \cos(\psi_M) \beta - \left[\frac{1}{4} - \frac{2\bar{\varepsilon}}{3} + \bar{\varepsilon}^2 - \frac{\bar{\varepsilon}^3}{3} \right. \\
& \left. + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} - \frac{\bar{\varepsilon}^3}{3} \right) \sin(\psi_M) \right] \frac{\dot{\beta}}{\Omega_M} + \left[\frac{1}{4} - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{12} + \mu \left(\frac{1}{3} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{6} \right) \sin(\psi_M) \right] \left[\left(\frac{P_h}{\Omega_M} \cos(\beta_{h_w}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Q_h}{\Omega_M} \sin(\beta_{h_w}) \right) \sin(\psi_M) + \left(\frac{-P_h}{\Omega_M} \sin(\beta_{h_w}) + \frac{Q_h}{\Omega_M} \cos(\beta_{h_w}) \right) \cos(\psi_M) \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{2.68}$$

En simplifiant la dynamique de battement (2.41), il est courant de retenir seulement les termes :

inertiel $M_I = -I_\beta \ddot{\beta}$

centrifuge $M_{CF} = -\Omega_M^2 [I_\beta \cos(\beta) + \bar{\varepsilon} r_M M_\beta] \sin(\beta)$

de Coriolis $M_{Cor} = 2 [I_\beta \cos^2(\beta) + \bar{\varepsilon} r_M M_\beta \cos(\beta)] \Omega_M \left[\left(P_h \cos(\beta_{h_w}) + \right. \right. \\ \left. \left. + Q_h \sin(\beta_{h_w}) \right) \sin(\psi_M) + \left(-P_h \sin(\beta_{h_w}) + Q_h \cos(\beta_{h_w}) \right) \cos(\psi_M) \right]$

de contrainte $M_R = -K_\beta \beta$

d'accélération angulaire

$$M_{AccA} = I_\beta \left\{ \left[\dot{P}_h \cos(\beta_{h_w}) + \dot{Q}_h \sin(\beta_{h_w}) \right] \sin(\psi_M) + \left[-\dot{P}_h \sin(\beta_{h_w}) + \dot{Q}_h \cos(\beta_{h_w}) \right] \cos(\psi_M) \right\}$$

et d'accélération normale (verticale) $M_{AccN} = M_\beta (\dot{W}_h + P_h V_h - U_h Q_h)$

ainsi que d'approximer le terme gravitationnel $M_G^{(WH)} \approx M_\beta g$. En remplaçant les moments ici-définis dans l'équation (2.69),

$$M_A + M_I + M_{CF} + M_{Cor} + M_R + M_{AccA} + M_{AccN} + M_G = 0 \quad (2.69)$$

nous calculons la dynamique de battement des pales dans le repère moyeu - vent mobile comme :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\ddot{\beta} + \frac{\rho c a r_M^2 \Omega_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \left[\frac{1}{4} - \frac{2\bar{\epsilon}}{3} + \bar{\epsilon}^2 - \frac{\bar{\epsilon}^3}{3} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\epsilon} + \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} - \frac{\bar{\epsilon}^3}{3} \right) \sin(\psi_M) \right] \ddot{\beta} + \\ & \left\{ \left[\frac{K_\beta}{I_\beta} + \left(1 + \frac{\bar{\epsilon} r_M M_\beta}{I_\beta} \right) \Omega_M^2 \right] + \underbrace{\frac{\rho c a r_M^2 \Omega_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \left[\frac{1}{4} - \frac{\bar{\epsilon}}{3} + \frac{\bar{\epsilon}^4}{12} + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{2}{3} - \bar{\epsilon} + \frac{\bar{\epsilon}^3}{3} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\epsilon} + \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right) \right] \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} + \mu \cos(\psi_M) \left[\frac{1}{3} - \frac{\bar{\epsilon}}{2} + \frac{\bar{\epsilon}^3}{6} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\epsilon} + \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right] \right\} \beta = \\ & = \underbrace{\frac{\rho c a r_M^2 \Omega_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \left[\frac{1}{4} - \frac{\bar{\epsilon}}{3} + \frac{\bar{\epsilon}^4}{12} + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{2}{3} - \bar{\epsilon} + \frac{\bar{\epsilon}^3}{3} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\epsilon} + \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right) \right] [\theta_0 - \\ & - A_{lw} \cos(\psi_M) - B_{lw} \sin(\psi_M)] + \underbrace{\frac{\rho c a r_M^2 \Omega_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \left[\frac{1}{5} - \frac{\bar{\epsilon}}{4} + \frac{\bar{\epsilon}^5}{20} + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{2}{3} - \bar{\epsilon} + \frac{\bar{\epsilon}^3}{3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{1}{2} - \frac{2\bar{\epsilon}}{3} + \frac{\mu \sin(\psi_M)}{3} - \frac{\bar{\epsilon} \mu \sin(\psi_M)}{2} \right) \right) \right] \theta_1 + \frac{M_\beta}{I_\beta} (\dot{W}_h + P_h V_h - U_h Q_h) - \\ & - \frac{M_\beta g}{I_\beta} + \underbrace{\frac{\rho c a r_M^2 \Omega_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \left[\frac{1}{3} - \frac{\bar{\epsilon}}{2} + \frac{\bar{\epsilon}^3}{6} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\epsilon} + \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right] \lambda + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2 + \frac{2\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{I_\beta} \right) \Omega_M \left[\left(P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w}) \right) \sin(\psi_M) - \left(P_h \sin(\beta_{h_w}) - Q_h \cos(\beta_{h_w}) \right) \cos(\psi_M) \right] + \\
& + \left[\dot{P}_h \cos(\beta_{h_w}) + \dot{Q}_h \sin(\beta_{h_w}) \right] \sin(\psi_M) + \left[-\dot{P}_h \sin(\beta_{h_w}) + \dot{Q}_h \cos(\beta_{h_w}) \right] \cos(\psi_M) + \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\rho c a r_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \Omega_M \left(\frac{1}{4} - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{12} \right) \left[\left(P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w}) \right) \sin(\psi_M) + \left(-P_h \sin(\beta_{h_w}) + \right. \right. \\
& + Q_h \cos(\beta_{h_w}) \left. \right) \cos(\psi_M) \left. \right] + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\rho c a r_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \mu \Omega_M \left(\frac{1}{6} - \frac{\bar{\varepsilon}}{4} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{12} \right) \left[\left(P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w}) \right) \sin(\psi_M) + \right. \\
& + \left. \left(-P_h \sin(\beta_{h_w}) + Q_h \cos(\beta_{h_w}) \right) \cos(\psi_M) \right] (1 - \cos(2\psi_M)) + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\rho c a r_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \mu \Omega_M \left(\frac{1}{6} - \frac{\bar{\varepsilon}}{4} + \right. \\
& + \left. \frac{\bar{\varepsilon}^3}{12} \right) \left[\left(P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w}) \right) \sin(\psi_M) + \left(-P_h \sin(\beta_{h_w}) + Q_h \cos(\beta_{h_w}) \right) \cos(\psi_M) \right] \sin(2\psi_M)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Étant donné que le rotor principal présente un ensemble des pales dont chacune est régie par une équation de type (2.70), il faut définir une transformation permettant l'expression de la dynamique de battement individuel des pales dans le repère moyen fixe. Écrire la transformation (2.70) sous forme matricielle (2.71), nous permet de généraliser la dynamique de battement individuel des pales en coordonnées multiples.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\beta}_{n_b} \end{bmatrix} + \mathbb{A}(\psi_M) \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\beta}_{n_b} \end{bmatrix} + \mathbb{B}(\psi_M) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n_b} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} j=1 \dots n_b \\ \psi_{M_j} = \psi_M + \frac{2\pi}{n_b}(j-1) \end{matrix} \\
& \mathbb{A}(\psi_M) = \text{diag} \left\{ \gamma_{Lock} \frac{\Omega_M}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{2\bar{\varepsilon}}{3} + \bar{\varepsilon}^2 - \frac{\bar{\varepsilon}^3}{3} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} - \frac{\bar{\varepsilon}^3}{3} \right) \sin(\psi_{M_j}) \right] \right\} \tag{2.71} \\
& \mathbb{B}(\psi_M) = \text{diag} \left\{ \left[\frac{K_\beta}{I_\beta} + \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{I_\beta} \right) \Omega_M^2 \right] + \gamma_{Lock} \frac{\Omega_M^2}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{12} + \mu \sin(\psi_M) \left(\frac{2}{3} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{3} + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right) \right] \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} + \mu \cos(\psi_M) \left[\frac{1}{3} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{6} + \mu \left(\frac{1}{2} - \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \right) \sin(\psi_M) \right] \right\}
\end{aligned}$$

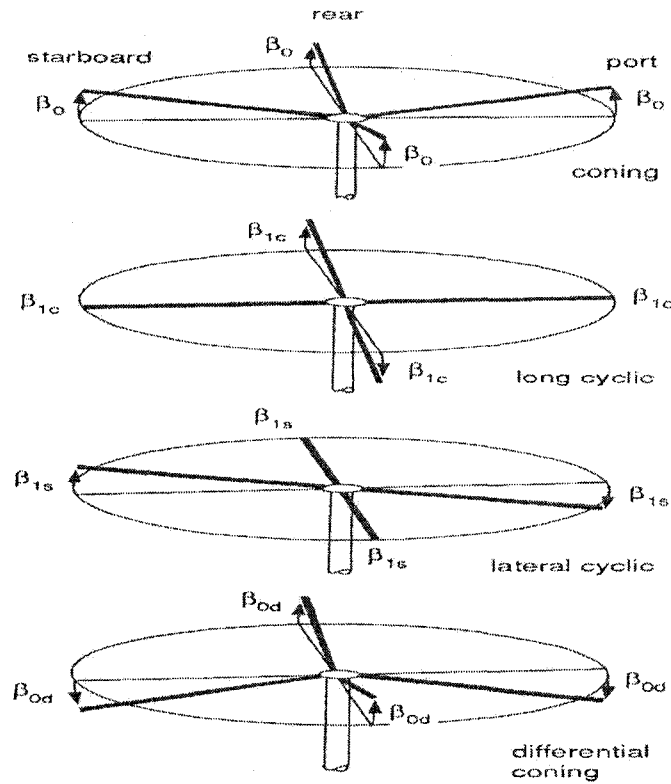


Figure 2.11 Modèle du disque de rotor avec coordonnées unies [Pad96]

Le vecteur $\begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_{n_B} \end{bmatrix}^T$ est calculé à partir de la partie droite de l'équation (2.70), en remplaçant ψ_M par ψ_{M_j} . Dans l'analyse du mouvement des pales, la procédure classique consiste à développer, dans le repère fixe, le mouvement de battement en série de Fourier.

$$\begin{aligned}
 \beta_j &= \beta_0 + (-1)^j \beta_{0d} + \sum_{n=1}^k \beta_{nC} \cos(n \psi_{M_j}) + \beta_{nS} \sin(n \psi_{M_j}) \quad j=1 \dots n_B \\
 \psi_{M_j} &= \psi_M + \frac{2\pi}{n_B} \cdot (j-1) \\
 k &= \frac{1}{2}(n_B - 1); n_B \{pair\} \\
 k &= \frac{1}{2}(n_B - 2); n_B \{impair\} \\
 \beta_0 &= \frac{1}{n_B} \sum_{j=1}^{n_B} \beta_j \quad \beta_{0d} = \frac{1}{n_B} \sum_{j=1}^{n_B} (-1)^j \beta_j \quad \beta_{nC} = \frac{2}{n_B} \sum_{j=1}^{n_B} \beta_j \cos(n \psi_{M_j}) \\
 \beta_{0d} &= 0 \text{ si } n_B \{impair\} \quad \beta_{nS} = \frac{2}{n_B} \sum_{j=1}^{n_B} \beta_j \sin(n \psi_{M_j})
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Écrivons la transformation (2.72) sous la forme matricielle (2.73) :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n_B} \end{bmatrix} &= \mathbb{T} \underline{\beta} = \begin{cases} = \mathbb{T} \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_{1C} & \beta_{1S} & \beta_{2C} & \beta_{2S} & \cdots & \beta_{\left(\frac{n-1}{2}\right)C} & \beta_{\left(\frac{n-1}{2}\right)S} & \beta_{0d} \end{bmatrix}^T n_B \{pair\} \\ = \mathbb{T} \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_{1C} & \beta_{1S} & \beta_{2C} & \beta_{2S} & \cdots & \beta_{\left(\frac{n-1}{2}\right)C} & \beta_{\left(\frac{n-1}{2}\right)S} \end{bmatrix}^T n_B \{impair\} \end{cases} \\
 \mathbb{T}_{n_B \{pair\}} &= \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_{M_1}) & \sin(\psi_{M_1}) & \cdots & \cos\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_1}\right) & \sin\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_1}\right) \\ 1 & \cos(\psi_{M_2}) & \sin(\psi_{M_2}) & \cdots & \cos\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_2}\right) & \sin\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\psi_{M_{n_B-1}}) & \sin(\psi_{M_{n_B-1}}) & \cdots & \cos\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_{n_B-1}}\right) & \sin\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_{n_B-1}}\right) \\ 1 & \cos(\psi_{M_{n_B}}) & \sin(\psi_{M_{n_B}}) & \cdots & \cos\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_{n_B}}\right) & \sin\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_{n_B}}\right) \end{bmatrix} \\
 \mathbb{T}_{n_B \{impair\}} &= \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_{M_1}) & \sin(\psi_{M_1}) & \cdots & \cos\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_1}\right) & \sin\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_1}\right) & (-1)^1 \\ 1 & \cos(\psi_{M_2}) & \sin(\psi_{M_2}) & \cdots & \cos\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_2}\right) & \sin\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_2}\right) & (-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\psi_{M_{n_B-1}}) & \sin(\psi_{M_{n_B-1}}) & \cdots & \cos\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_{n_B-1}}\right) & \sin\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_{n_B-1}}\right) & (-1)^{(n_B-1)} \\ 1 & \cos(\psi_{M_{n_B}}) & \sin(\psi_{M_{n_B}}) & \cdots & \cos\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_{n_B}}\right) & \sin\left(\frac{1}{2}(n_B-1)\psi_{M_{n_B}}\right) & (-1)^{n_B} \end{bmatrix} \\
 & \hspace{15em} (2.73)
 \end{aligned}$$

La figure 2.11 illustre les principales coordonnées unies : de conicité β_0 , de battement cyclique longitudinal β_{1C} , de battement cyclique latéral β_{1S} et de conicité différentielle β_d . Les coordonnées unies peuvent être vues comme différents modes. Le premier, β_0 , correspond au mode de conicité - toutes les pales battent ensemble dans un cône. Les deux premiers modes cycliques, β_{1C} , β_{1S} , représentent les premières inclinaisons harmoniques longitudinales et latérales du disque, tandis que les modes des fréquences harmoniques plus grandes correspondent aux oscillations azimutales autour des

coordonnées principales. Pour un nombre pair de pales, le mode différentiel, β_{od} , peut être visualisé (pour $n_B = 4$, figure 2.11) comme mode avec des paires opposées de pales battant ensemble, mais en opposition aux paires voisines. La transformation aux coordonnées unies n'implique aucune approximation et les différents mouvements de la pale peuvent être complètement reconstitués. La transformation inverse de la forme matricielle (2.71) permet le passage du mouvement de battement des pales, de coordonnées multiples dans le repère moyeu mobil en coordonnées uni dans le repère moyeu fixe.

Procédant à la transformation inverse, nous calculons l'équation différentielle de battement des pales dont la matrice \mathbb{D} peut être vue comme matrice d'amortissement aérodynamique et la matrice \mathbb{K} comme matrice de raideur aérodynamique.

$$\ddot{\underline{\beta}} + \mathbb{D}(\psi_M) \dot{\underline{\beta}} + \mathbb{K}(\psi_M) \underline{\beta} = f(\psi_M) \quad (2.74)$$

$$f = T^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n_B} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \mathbb{D} = T^{-1} [2\dot{T} + A(\psi_M) T] \quad (2.75)$$

$$\mathbb{K} = T^{-1} [\ddot{T} + A(\psi_M) \dot{T} + B(\psi_M) T]$$

Pour calculer l'inverse de la matrice (T), nous procéderons à un changement d'échelle.

$$\underline{\beta} = T_s \underline{\beta}_l; \quad T_{s_{n_B \{pair\}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{n_B}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{n_B}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{2}{n_B}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\frac{1}{n_B}} \end{bmatrix}; \quad T_{s_{n_B \{mpair\}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{n_B}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{n_B}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{2}{n_B}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\frac{2}{n_B}} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

La transformation résultante est orthogonale :

$$\mathbb{T}_I = \mathbb{T} \mathbb{T}_s \quad \mathbb{T}^{-1} = \mathbb{T}_s \mathbb{T}_I^{-1} = \mathbb{T}_s^2 \mathbb{T}^T \quad (2.77)$$

En comparant l'équation différentielle en coordonnées unies (2.74) et celle en coordonnées multiples (2.71), nous pouvons énoncer deux différences importantes. D'abord, l'équation (2.74) est maintenant couplée et, ensuite, elle contient des coefficients périodiques pour tout vol non stationnaire. La fréquence de base de la périodicité est directement liée au nombre de pales du rotor. Les termes périodiques dans les matrices ne contiennent plus les premières harmoniques, mais des harmoniques à fréquence de base 2 par tour pour un rotor à 4 pales et 3 par tour pour un rotor à 3 pales. En général, on peut montrer que pour un rotor à 3, 5, 7 pales, la fréquence de base est 3, 5, 7, respectivement et 2, 3, 4 pour un rotor à 4, 6, 8 pales. Une approximation classique consiste à négliger les termes périodiques, ramenant par conséquent l'équation différentielle en coordonnées unies (2.74) à une équation différentielle ordinaire avec les coefficients constants, qui peuvent alors être ajoutée aux équations du mouvement du fuselage. En l'absence des termes périodiques, l'équation différentielle en coordonnées unies, prend la forme conforme au paradigme de l'automatique dans l'espace d'état.

2.5.3 L'équation dynamique de l'extrémité de la pale

Développée dans la section 2.5.2, la procédure mathématique d'approximer la dynamique de battement des pales avec les principales coordonnées unies (en exécutant la transformation de coordonnées multiples en coordonnées uni et en négligeant les termes autres que les premiers périodiques) est identique à la méthode classique de développer l'équation dynamique de l'extrémité de la pale dans le repère "moyeu – vent" fixe, en premier ordre avec coefficients variables du temps :

$$\begin{aligned}
\beta &= a_0(t) - a_{l_r}(t) \cos(\psi_M) - b_{l_r}(t) \sin(\psi_M) \\
\dot{\beta} &= \dot{a}_0(t) - [\dot{a}_{l_r}(t) + b_{l_r}(t) \Omega_M] \cos(\psi_M) - [\dot{b}_{l_r}(t) - a_{l_r}(t) \Omega_M] \sin(\psi_M) \\
\ddot{\beta} &= \ddot{a}_0(t) - [\ddot{a}_{l_r}(t) + 2\dot{b}_{l_r}(t) \Omega_M - a_{l_r} \Omega_M^2] \cos(\psi_M) - [\ddot{b}_{l_r}(t) - 2\dot{a}_{l_r}(t) \Omega_M - b_{l_r} \Omega_M^2] \sin(\psi_M)
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Égaliser respectivement les termes constants et les termes périodiques de $\cos(\psi_M)$ et de $\sin(\psi_M)$ nous permet d'écrire l'équation dynamique de l'extrémité de la pale sous la forme matricielle (2.79) :

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta} + \tilde{\mathbb{D}} \dot{\beta} + \tilde{\mathbb{K}} \beta &= \tilde{f} \quad ; \quad \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{l_r} & b_{l_r} \end{bmatrix}^T \tag{2.79} \\
\tilde{\mathbb{D}} &= \Omega_M \begin{bmatrix} \frac{\gamma_{Lock}}{24} (3 - 8\bar{\varepsilon} + 6\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^4) & 0 & -\frac{\gamma_{Lock}}{12} \mu (1 - 3\bar{\varepsilon} + 3\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^3) \\ 0 & \frac{\gamma_{Lock}}{24} (3 - 8\bar{\varepsilon} + 6\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^4) & 2 \\ -\frac{\gamma_{Lock}}{6} \mu (1 - 3\bar{\varepsilon} + 3\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^3) & -2 & \frac{\gamma_{Lock}}{24} (3 - 8\bar{\varepsilon} + 6\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^4) \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbb{K}} &= \Omega_M^2 \begin{bmatrix} \mathfrak{P}^2 + \frac{\gamma_{Lock}}{8} \mu^2 (1 - 2\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2) & -\frac{\gamma_{Lock}}{12} \mu (\bar{\varepsilon} + 2\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^3) & -\frac{\gamma_{Lock}}{12} \mu (2 - 3\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^3) \tan(\delta_3) \\ -\frac{\gamma_{Lock}}{12} \mu (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) & \mathfrak{P}^2 - 1 + \frac{\gamma_{Lock}}{16} \mu^2 (1 - 2\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2) & \frac{\gamma_{Lock}}{24} (3 - 8\bar{\varepsilon} + 6\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^4) + \frac{\gamma_{Lock}}{16} \mu^2 (1 - 2\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2) \\ -\frac{\gamma_{Lock}}{6} \mu (2 - 3\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^3) \tan(\delta_3) & -\frac{\gamma_{Lock}}{24} (3 - 8\bar{\varepsilon} + 6\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^4) + \frac{\gamma_{Lock}}{16} \mu^2 (1 - 2\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2) & \mathfrak{P}^2 - 1 + \frac{3\gamma_{Lock}}{16} \mu^2 (1 - 2\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2) \end{bmatrix} \\
\mathfrak{P}^2 &= 1 + \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{I_\beta \Omega_M^2} + \frac{K_\beta}{I_\beta} + \underbrace{\frac{\rho c a r_M^2}{I_\beta}}_{\gamma_{Lock}} \left(\frac{1}{8} - \frac{\bar{\varepsilon}}{6} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{24} \right) \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f} = \Omega_M^2 & \left[\begin{array}{c} \frac{\gamma_{Lock}}{8} \left[1 - \frac{4\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} + \mu^2 (1 - \bar{\varepsilon})^2 \right] \theta_0 + \frac{\gamma_{Lock}}{2} \left[\frac{1}{5} - \frac{\bar{\varepsilon}}{4} + \frac{\bar{\varepsilon}^5}{20} + \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{6} \right) \right] \theta_1 - \\ - \frac{\gamma_{Lock}}{12} \mu (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) B_{lw} + \frac{\gamma_{Lock}}{12} (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) \lambda + \frac{\gamma_{Lock} \mu}{24 \Omega_M} (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) P_{hw} \\ \dots \dots \dots \frac{\gamma_{Lock}}{8} \left[1 - \frac{4\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} + \frac{\mu^2}{2} (1 - \bar{\varepsilon})^2 \right] A_{lw} - \frac{2}{\Omega_M} \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{I_\beta} \right) P_{hw} - \frac{\gamma_{Lock}}{24 \Omega_M} (3 - 4\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^4) Q_{hw} - \frac{\dot{Q}_{hw}}{\Omega_M^2} \\ \dots \dots \dots - \frac{\gamma_{Lock}}{6} \mu (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) \theta_0 - \frac{\gamma_{Lock}}{12} \mu (3 - 4\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^4) \theta_1 + \frac{\gamma_{Lock}}{8} \left[1 - \frac{4\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} + \frac{3\mu^2}{2} (1 - \bar{\varepsilon})^2 \right] B_{lw} - \\ - \frac{\gamma_{Lock}}{4} \mu (1 - \bar{\varepsilon})^2 \lambda - \frac{\gamma_{Lock}}{24 \Omega_M} (3 - 4\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^4) P_{hw} + \frac{2}{\Omega_M} \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{I_\beta} \right) Q_{hw} - \frac{\dot{P}_{hw}}{\Omega_M^2} + \\ + \frac{M_\beta}{I_\beta \Omega_M^2} [\dot{W}_h + P_h V_h - U_h Q_h - g] \end{array} \right] \\
\tilde{f} = \Omega_M^2 & \left[\begin{array}{cccc} \frac{\gamma_{Lock}}{8} \left[1 - \frac{4\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} + \mu^2 (1 - \bar{\varepsilon})^2 \right] & \frac{\gamma_{Lock}}{2} \left[\frac{1}{5} - \frac{\bar{\varepsilon}}{4} + \frac{\bar{\varepsilon}^5}{20} + \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}^3}{6} \right) \right] & 0 & -\frac{\gamma_{Lock}}{12} \mu (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_{Lock}}{8} \left[1 - \frac{4\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} + \frac{\mu^2}{2} (1 - \bar{\varepsilon})^2 \right] & 0 \\ -\frac{\gamma_{Lock}}{6} \mu (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) & -\frac{\gamma_{Lock}}{12} \mu (3 - 4\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^4) & 0 & \frac{\gamma_{Lock}}{8} \left[1 - \frac{4\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} + \frac{3\mu^2}{2} (1 - \bar{\varepsilon})^2 \right] \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ A_{lw} \\ B_{lw} \end{bmatrix} + \\
+ \Omega_M^2 & \left[\begin{array}{cccc} \frac{\gamma_{Lock} \mu}{24 \Omega_M} (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\Omega_M} \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{I_\beta} \right) & -\frac{\gamma_{Lock}}{24 \Omega_M} (3 - 4\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^4) & 0 & -\frac{1}{\Omega_M^2} \\ -\frac{\gamma_{Lock}}{24 \Omega_M} (3 - 4\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^4) & \frac{2}{\Omega_M} \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{I_\beta} \right) & -\frac{1}{\Omega_M^2} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} P_{hw} \\ Q_{hw} \\ \dot{P}_{hw} \\ \dot{Q}_{hw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_{Lock} \Omega_M^2}{12} (2 - 3\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^3) \lambda + \frac{M_\beta}{I_\beta} (\dot{W}_h + P_h V_h - U_h Q_h - g) \\ 0 \\ -\frac{\gamma_{Lock} \Omega_M^2}{4} \mu (1 - \bar{\varepsilon})^2 \lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

À partir de l'équation différentielle de battement vertical des pales (2.79), les observations suivantes peuvent être faites :

- a. Dans le repère "moyeu – vent" fixe, l'équation différentielle (2.79) contient également des coefficients périodiques pour tout vol non stationnaire. La fréquence de base de la périodicité est directement liée au nombre de pales du rotor.
- b. L'amplitude des termes dans la matrice d'amortissement aérodynamique est fonction du nombre de Lock γ_{Lock} , du décalage de la charnière $\bar{\epsilon}r_M$, et du taux d'avancement μ et est indépendante de la raideur de l'articulation K_β et du couplage $K_1 = \tan(\delta_3)$. Pour un taux d'avancement donné, plus le nombre de Lock est inférieur et plus le décalage de la charnière est grand, plus l'amplitude des termes dans la matrice d'amortissement est petite.
- c. L'amplitude maximale des termes dans la matrice de rigidité aérodynamique est fonction du nombre de Lock γ_{Lock} , du décalage de la charnière $\bar{\epsilon}r_M$, et du couplage $K_1 = \tan(\delta_3)$. La raideur de l'articulation K_β n'a aucun impact direct sur les termes périodiques. Pour un taux d'avancement donné, une diminution du nombre de Lock diminue l'amplitude des termes de la matrice de rigidité. Cependant, l'effet du décalage de la charnière $\bar{\epsilon}r_M$ et du couplage $K_1 = \tan(\delta_3)$ est plus compliqué. Pour $K_1 = 0$, une augmentation du décalage de la charnière réduira l'effet des termes dans la matrice de rigidité aérodynamique.
- d. Pour une valeur des entrées : pas collectif θ_0 , angle de pas cyclique longitudinal $A_{l_{\theta}}$ et angle de pas cyclique latéral $B_{l_{\theta}}$ et pour une torsion initiale θ_1 donnée, l'influence paramétrique sur les termes dans le vecteur d'excitation, f , est semblable à celle dans la matrice d'amortissement aérodynamique.

Dans la dynamique de l'extrémité de la pale il y a trois modes : conique, d'avancement (ou de nutation) et régressif (ou de précession). L'impacte du mode régressif sur la dynamique du rotor et par conséquent sur les caractéristiques de manœuvrabilité de l'hélicoptère est le plus important. Le mode régressif possède la plus basse fréquence des trois et il a une tendance de coupler les modes de fuselage. Les deux autres modes (conique et d'avancement) ont des fréquences naturelles plus élevées de l'ordre de la fréquence de rotation du rotor et deux fois de la fréquence de rotation du rotor, respectivement, et leur impact sur les caractéristiques de manœuvrabilité de l'hélicoptère est donc beaucoup moins significatif.

La fréquence naturelle normalisée et le facteur d'amortissement du mode conique en vol stationnaire sont calculés comme

$$\frac{\omega_{nc}}{\Omega_M} = \mathfrak{P} = \sqrt{1 + \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{I_\beta \Omega_M^2} + \frac{K_\beta}{I_\beta} + \underbrace{\frac{\rho c a r_M^2}{I_\beta} \left(\frac{1}{8} - \frac{\bar{\varepsilon}}{6} + \frac{\bar{\varepsilon}^4}{24} \right)}_{\gamma_{Lock}} \underbrace{\tan(\delta_3)}_{k_1}} \quad (2.80)$$

$$\varsigma_c = \varsigma = \frac{\gamma_{Lock}}{16\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{8\bar{\varepsilon}}{3} + 2\bar{\varepsilon}^2 - \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} \right)$$

Pour le mode d'avancement et le mode régressif, la fréquence naturelle normalisée et le facteur d'amortissement sont respectivement :

$$\frac{\omega_{na}}{\Omega_M} = \sqrt{1 + \mathfrak{P}^2 + 2\mathfrak{P}\sqrt{1 - \varsigma^2}} \quad \varsigma_a = \frac{\gamma_{Lock}}{16\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{8\bar{\varepsilon}}{3} + 2\bar{\varepsilon}^2 - \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} \right) \frac{\Omega_M}{\omega_{na}} \quad (2.81)$$

$$\frac{\omega_{nr}}{\Omega_M} = \sqrt{1 + \mathfrak{P}^2 - 2\mathfrak{P}\sqrt{1 - \varsigma^2}} \quad \varsigma_r = \frac{\gamma_{Lock}}{16\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{8\bar{\varepsilon}}{3} + 2\bar{\varepsilon}^2 - \frac{\bar{\varepsilon}^4}{3} \right) \frac{\Omega_M}{\omega_{nr}}$$

Pour un vol autre que stationnaire, le mode conique n'est plus découplé et les caractéristiques de la dynamique de l'extrémité de la pale deviennent plus complexes. Cependant les grandeurs des fréquences naturelles normalisées des trois modes préservent l'ordre du taux ci-dessus. Il est intéressant de noter, que le pas de temps du

modèle de simulation en temps réel doit être inférieur à $\frac{4\pi}{\Omega_M}$ (pour le modèle

$$\frac{4\pi}{27} = 0,4654).$$

2.5.4 Modèle dynamique de la vitesse induite

Le concept du modèle dynamique de la vitesse a été développé par un certain nombre de chercheurs, mais repose sur l'idée de Peters et est connu sous le nom de modèle de Pitt/Peters [PP81] qui supposent que la distribution de la vitesse induite a la forme :

$$\lambda(t, r_b, \psi_M) = \frac{v_0 + v_1(\psi_M)}{(\Omega_M r_M)} = \lambda_0(t) + \lambda_s(t) \frac{r_b}{r_M} \sin(\psi_M) + \lambda_c(t) \frac{r_b}{r_M} \cos(\psi_M) \quad (2.82)$$

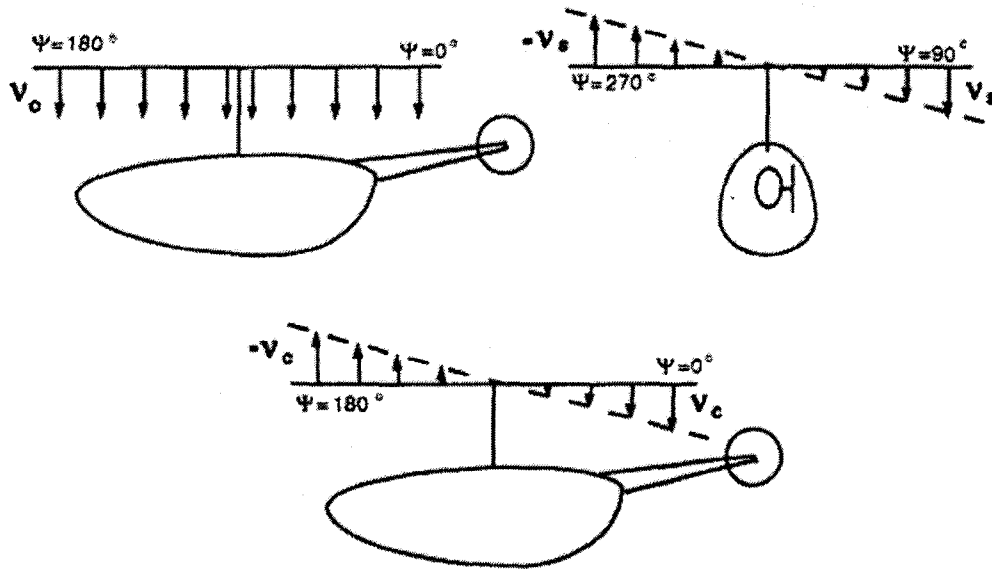


Figure 2.12 Modèle dynamique de la vitesse induite

La formulation générale d'un modèle dynamique de la vitesse induite à trois degrés de liberté peut être décrite par l'équation différentielle (2.83) :

$$M_{flow} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_s \\ \dot{\lambda}_c \end{bmatrix} + L_{flow}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_s \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T \\ C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho \pi r_M^2 (r_M \Omega_M)^2} \begin{bmatrix} T \\ L_w \\ M_w \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Les matrices M_{flow} et L_{flow} dans l'expression (2.83) sont associées respectivement à la masse d'air et au gain et peuvent être dérivées d'un certain nombre de différentes théories (par exemple, disque de sustentateur, théorie de vortex). C_T , C_L et C_M sont le coefficient de sustentation, le coefficient du moment de roulis et le coefficient du moment de tangage, respectivement. Une expression pour les matrices M_{flow} et L_{flow} est donné par (2.84) où χ_h est l'angle du sillage du rotor principal :

$$M_{flow} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3 \pi \Omega_M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{45 \pi \Omega_M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{45 \pi \Omega_M} \end{bmatrix} \quad L_{flow} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \bar{V}_t} & 0 & \frac{15 \pi}{64 \bar{V}_m} \tan\left(\frac{\chi_h}{2}\right) \\ 0 & \frac{4}{(1 + \cos(\chi_h)) \bar{V}_m} & 0 \\ \frac{15 \pi}{64 \bar{V}_m} & 0 & \frac{-4 \cos(\chi_h)}{(1 + \cos(\chi_h)) \bar{V}_m} \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_t = \sqrt{\mu^2 + \left(\lambda_0 - \frac{W_h}{\Omega_M r_M} \right)^2} \quad \bar{V}_m = \frac{\mu^2 + \left(2 \lambda_0 - \frac{W_h}{\Omega_M r_M} \right) \left(\lambda_0 - \frac{W_h}{\Omega_M r_M} \right)}{\bar{V}_t} \quad \tan(\chi_h) = \frac{\mu}{\lambda_0} \quad (2.84)$$

2.5.5 Calcul des forces et des moments du rotor principal

Se référant à la figure 2.9, supposons les angles β , ϕ_r et θ_r petits, donc $\phi_r \cong \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}}$ et en

conséquence $U_r^2 \cong u_{\perp}^2$, $\alpha_r \cong \theta_r + \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}}$, $\Delta F_x \cong \Delta L \phi_r + \Delta D$, $\Delta F_z \cong \Delta L$. La force de

sustentation peut être calculée par la résultante de forces verticales :

$$\begin{aligned}
T = & \frac{n_B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \underbrace{\int_0^{r_M(1-\bar{\varepsilon})} \frac{\rho}{2} (\Omega_M r_M)^2 a c u_{\perp}^2 (\theta_r + \phi_r) dr_b}_{F_d^{(W)}} - \ddot{\beta} M_{\beta} + m_P (\dot{W}_h + P_h V_h - U_h Q_h - g) \right\} d(\psi_M) + \\
& + \frac{n_B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 2\Omega_M \left(\frac{M_{\beta}}{g} + \bar{\varepsilon} r_M m_P \right) [P_{h_w} \cos(\psi_M) - Q_{h_w} \sin(\psi_M)] \right\} d(\psi_M) + \\
& + \frac{n_B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{M_{\beta}}{g} [\dot{P}_{h_w} \sin(\psi_M) + \dot{Q}_{h_w} \cos(\psi_M)] \right\} d(\psi_M) \\
\theta_r = & \theta_0 + \theta_r(r_b) - A_1 \cos(\psi_M) - B_1 \sin(\psi_M) - K_1 \beta \quad ; \quad \phi_r \cong \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Finalemment

$$\begin{aligned}
T = & \frac{n_B}{2} \rho a c r_M^3 \Omega_M^2 \left\{ \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)\lambda_0}{2} + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})\lambda_s}{2} + \left[\frac{(1-\bar{\varepsilon}^3)}{3} + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})}{2} \right] \theta_0 + \right. \\
& + \left[\frac{(1-\bar{\varepsilon}^4)}{4} + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} \right] \theta_1 - \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon}^2)}{2} \left(B_{h_w} - \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} b_{h_w} \right) - \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} \left[\frac{(1-\bar{\varepsilon}^3)}{3} + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})}{2} \right] a_0 + \\
& + \frac{\mu \bar{\varepsilon}(1-\bar{\varepsilon})}{2} a_{h_w} - \frac{(2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3)}{6} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} \frac{\dot{b}_{h_w}}{\Omega_M} + \\
& + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} \underbrace{\left[\frac{P_{h_w}}{\Omega_M} \right]}_{\left[\frac{P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w})}{\Omega_M} \right]} \left. \right\} - n_B [\ddot{a}_0 M_{\beta} - m_P (\dot{W}_h + P_h V_h - U_h Q_h - g)]
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Dans le repère "moyeu" fixe

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\beta_{h_w}) & -\sin(\beta_{h_w}) \\ \sin(\beta_{h_w}) & \cos(\beta_{h_w}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{h_w} \\ B_{h_w} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\beta_{h_w}) & -\sin(\beta_{h_w}) \\ \sin(\beta_{h_w}) & \cos(\beta_{h_w}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{h_w} \\ b_{h_w} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Les deux autres forces dans le repère "moyeu - vent mobile" sont calculées comme :

$$\begin{aligned}
 F_x^{(\mathcal{WH})} &= \int_0^{r_M(1-\bar{\epsilon})} \frac{\rho}{2} (\Omega_M r_M)^2 u_{\perp}^2 c [a(\theta_r + \phi_r) \phi_r - C_d] dr_b = \\
 &= \int_0^{r_M(1-\bar{\epsilon})} \frac{\rho}{2} (\Omega_M r_M)^2 c [a(u_{\perp} u_{\parallel} \theta_r + u_{\parallel}^2) + u_{\perp}^2 C_d] dr_b
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$F_y^{(\mathcal{WH})} = \beta F_A^{(\mathcal{WH})} = \beta \int_0^{r_M(1-\bar{\epsilon})} \frac{\rho}{2} (\Omega_M r_M)^2 a c u_{\perp}^2 (\theta_r + \phi_r) dr_b \tag{2.89}$$

Selon (2.55), les forces (2.88) et (2.89) sont calculées dans le repère "moyeu - vent" fixe comme :

$$H_W = \frac{n_B}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-F_x^{(\mathcal{WH})} \sin(\psi_M) + F_y^{(\mathcal{WH})} \cos(\psi_M)] d(\psi_M) \tag{2.90}$$

$$Y_W = -\frac{n_B}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-F_x^{(\mathcal{WH})} \cos(\psi_M) - F_y^{(\mathcal{WH})} \sin(\psi_M)] d(\psi_M) \tag{2.91}$$

Le signe négatif devant l'intégrale est ajouté pour respecter le trièdre direct, composé des directions des forces $[H_W \ Y_W \ T]$.

Dans le repère "moyeu" fixe :

$$\begin{bmatrix} X_{MR} \\ Y_{MR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{h_w}) & \sin(\beta_{h_w}) \\ -\sin(\beta_{h_w}) & \cos(\beta_{h_w}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_W \\ Y_W \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

Le développement analytique des expressions (2.90) et (2.91) est présenté respectivement par les relations (2.93) et (2.94).

$$\begin{aligned}
H_W = & \frac{n_B}{2} \rho a c r_M^4 \Omega_M^2 \left\{ \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon}^2) C_{D_0}}{2a} - \frac{\overbrace{\theta_0 - \tan(\delta_3)}^{K_1} a_0}{4} \left[2\mu(1-\bar{\varepsilon})\lambda_0 + (1-\bar{\varepsilon}^2)\lambda_s - \mu(1-\bar{\varepsilon})^2 \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \right. \right. \\
& + \frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{3} \frac{\dot{b}_{l_w}}{\Omega_M} - \frac{4-3\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^3}{3} a_{l_w} + \frac{2(1-\bar{\varepsilon}^3)}{3} \frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w})}^{P_{h_w}}}{\Omega_M} \left. \right] - \frac{\theta_1}{4} \left[\mu(1-\bar{\varepsilon}^2)\lambda_0 + \frac{2(1-\bar{\varepsilon}^3)\lambda_s}{3} - \right. \\
& - \mu \frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{3} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4}{6} \frac{\dot{b}_{l_w}}{\Omega_M} - \frac{3-2\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^4}{3} a_{l_w} + \frac{(1-\bar{\varepsilon}^4)}{2} \frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w})}^{P_{h_w}}}{\Omega_M} \left. \right] + \\
& + \frac{B_{l_w} - \overbrace{\tan(\delta_3)}^{K_1} b_{l_w}}{4} \left[-\frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{3} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \frac{3\mu(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} \frac{\dot{b}_{l_w}}{\Omega_M} - \mu \frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^2}{2} a_{l_w} + (1-\bar{\varepsilon}^2)\lambda_0 + \frac{3\mu(1-\bar{\varepsilon})\lambda_s}{2} + \right. \\
& + \frac{3\mu(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} \frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w})}^{P_{h_w}}}{\Omega_M} \left. \right] + \frac{A_{l_w} - \overbrace{\tan(\delta_3)}^{K_1} a_{l_w}}{4} \left[\mu \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \frac{2(1-\bar{\varepsilon}^3)}{3} a_0 + \right. \\
& + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})}{2} \lambda_c - \mu \frac{(\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^2)}{2} b_{l_w} + \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} \frac{\overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_w}) + Q_h \cos(\beta_{h_w})}^{Q_{h_w}}}{\Omega_M} \left. \right] - \lambda_0 \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{2} \frac{\dot{b}_{l_w}}{\Omega_M} + \\
& + \frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^2}{4} \lambda_0 a_{l_w} - \left[\lambda_0 \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{2} - \frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{6} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{16} a_{l_w} \right] \frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_w}) + Q_h \sin(\beta_{h_w})}^{P_{h_w}}}{\Omega_M} \\
& - \left[\frac{1-\bar{\varepsilon}^3}{6} a_0 + \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{16} b_{l_w} \right] \frac{\overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_w}) + Q_h \cos(\beta_{h_w})}^{Q_{h_w}}}{\Omega_M} + \lambda_s \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{2} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} - (1-\bar{\varepsilon})\lambda_0\lambda_s - \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} \lambda_c a_0 + \\
& + \mu \left[-\frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{16} \left(b_{l_w} \frac{\dot{a}_{l_w}}{\Omega_M} + a_{l_w} \frac{\dot{b}_{l_w}}{\Omega_M} \right) + \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} a_0^2 + \frac{2-\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^2}{8} a_{l_w}^2 + \frac{\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^2}{8} b_{l_w}^2 \right] - \\
& - \frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{12} \left[a_{l_w} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + a_0 \left(\frac{\dot{a}_{l_w}}{\Omega_M} + b_{l_w} \right) \right] + \frac{(1-\bar{\varepsilon})^3}{3} \left(\frac{\dot{b}_{l_w}}{\Omega_M} - a_{l_w} \right) \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} - \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon})}{8} (\lambda_c b_{l_w} + \lambda_s a_{l_w}) \left. \right\}
\end{aligned}
\tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}
Y_W = & \frac{n_B}{2} \rho a c r_M^4 \Omega_M^2 \left\{ \left(\theta_0 - \overbrace{\tan(\delta_3)}^{K_1} a_0 \right) \left[\frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} \lambda_c - \mu \frac{3(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} a_0 + \frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{12} \frac{\dot{a}_{l_W}}{\Omega_M} + \right. \right. \\
& + \left(\frac{4-3\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^3}{12} + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})}{2} \right) b_{l_W} + \frac{(1-\bar{\varepsilon}^3) \overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_W}) + Q_h \cos(\beta_{h_W})}^{Q_{h_W}}}{6 \Omega_M} \left. \right] + \theta_1 \left[\frac{(1-\bar{\varepsilon}^3)}{6} \lambda_c - \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon}^3)}{2} a_0 + \right. \\
& + \frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4}{24} \frac{\dot{a}_{l_W}}{\Omega_M} + \left(\frac{3-2\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^4}{12} + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} \right) b_{l_W} + \frac{(1-\bar{\varepsilon}^4) \overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_W}) + Q_h \cos(\beta_{h_W})}^{Q_{h_W}}}{8 \Omega_M} \left. \right] + \\
& + \left(B_{l_W} - \overbrace{\tan(\delta_3)}^{K_1} b_{l_W} \right) \left[\left(\frac{1-\bar{\varepsilon}^3}{6} + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})}{2} \right) a_0 - \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{16} \frac{\dot{a}_{l_W}}{\Omega_M} - \mu \frac{4-\bar{\varepsilon}-3\bar{\varepsilon}^2}{8} b_{l_W} - \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon})}{8} \lambda_c - \right. \\
& - \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2) \overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_W}) + Q_h \cos(\beta_{h_W})}^{Q_{h_W}}}{16 \Omega_M} \left. \right] + \frac{A_{l_W} - \overbrace{\tan(\delta_3)}^{K_1} a_{l_W}}{4} \left[\frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{3} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} - (1-\bar{\varepsilon}^2) \lambda_0 - \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})}{2} \lambda_s - \right. \\
& - \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} \frac{\dot{b}_{l_W}}{\Omega_M} - \mu \frac{(2+\bar{\varepsilon}-3\bar{\varepsilon}^2)}{2} a_{l_W} - \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2) \overbrace{P_h \cos(\beta_{h_W}) + Q_h \sin(\beta_{h_W})}^{P_{h_W}}}{4 \Omega_M} \left. \right] + \lambda_0 \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{2} \frac{\dot{a}_{l_W}}{\Omega_M} + \\
& + \frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^2}{4} \lambda_0 b_{l_W} + \left[\lambda_0 \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{2} - \frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{6} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \mu \frac{7(1-\bar{\varepsilon}^2)}{16} a_{l_W} \right] \frac{\overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_W}) + Q_h \cos(\beta_{h_W})}^{Q_{h_W}}}{\Omega_M} - \\
& - \left[\frac{1-\bar{\varepsilon}^3}{6} a_0 - \mu \frac{5(1-\bar{\varepsilon}^2)}{16} b_{l_W} \right] \frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_W}) + Q_h \sin(\beta_{h_W})}^{P_{h_W}}}{\Omega_M} - \lambda_c \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{2} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + (1-\bar{\varepsilon}) \lambda_0 \lambda_s - \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} \lambda_s a_0 + \\
& + \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{16} \left(12 a_0 \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + 7 a_{l_W} \frac{\dot{a}_{l_W}}{\Omega_M} + 5 b_{l_W} \frac{\dot{b}_{l_W}}{\Omega_M} \right) - \frac{(1-\bar{\varepsilon})^3}{3} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} \frac{\dot{a}_{l_W}}{\Omega_M} + \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon})}{8} (5 \lambda_s b_{l_W} + 7 \lambda_c a_{l_W}) - \\
& - \frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{12} \left(\frac{\dot{b}_{l_W}}{\Omega_M} - a_{l_W} \right) a_0 - \frac{(2-5\bar{\varepsilon}+4\bar{\varepsilon}^2-\bar{\varepsilon}^3)}{4} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} b_{l_W} - \mu \frac{(1-\bar{\varepsilon})}{4} (6 \lambda_0 a_0 + 4 \mu a_0 a_{l_W} - a_{l_W} b_{l_W}) \left. \right\}
\end{aligned}$$

(2.94)

Dans le repère "corps" les forces créées par le rotor sont calculées comme :

$$\underline{F}_M^{(B)} = \begin{bmatrix} X_{MR} \\ Y_{MR} \\ T_{MR} \end{bmatrix}^{(B)} = \text{Rot}_{B \leftarrow \mathcal{H}} \begin{bmatrix} -X_{MR} \\ Y_{MR} \\ -T_{MR} \end{bmatrix}^{(\mathcal{H})} = (\text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow B})^T \begin{bmatrix} -X_{MR} \\ Y_{MR} \\ -T_{MR} \end{bmatrix}^{(\mathcal{H})} = \begin{bmatrix} -X_{MR} & Y_{MR} & -T_{MR} \end{bmatrix}^{(\mathcal{H})} \text{Rot}_{B \leftarrow \mathcal{H}} \quad (2.95)$$

Le moment de roulis et le moment de tangage et le rotor couple sont calculées dans le repère "moyeu - vent" fixe comme :

$$L_w = \frac{n_B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{r_M(1-\bar{\varepsilon})} r_b \Delta F_z^{(\mathcal{M})} \sin(\psi_M) dr_b \right] d(\psi_M) + \frac{n_B}{2} \left(K_\beta b_{lw} - \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{g} (\ddot{b}_{lw} - 2\dot{a}_{lw} \Omega_M - b_{lw} \Omega_M^2) \right) \quad (2.96)$$

$$M_w = \frac{n_B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{r_M(1-\bar{\varepsilon})} r_b \Delta F_z^{(\mathcal{M})} \cos(\psi_M) dr_b \right] d(\psi_M) + \frac{n_B}{2} \left(K_\beta a_{lw} - \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{g} (\ddot{a}_{lw} + 2\dot{b}_{lw} \Omega_M - a_{lw} \Omega_M^2) \right) \quad (2.97)$$

Le rotor couple est calculé comme :

$$N_{MR} = \frac{n_B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{r_M(1-\bar{\varepsilon})} r_b \underbrace{(\Delta L \phi_r + \Delta D)}_{\Delta F_x} dr_b \right] d(\psi_M) \quad (2.98)$$

Dans le repère "moyeu" fixe :

$$\underline{M}_M^{(\mathcal{H})} = \begin{bmatrix} L_{MR} \\ M_{MR} \\ N_{MR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{hw}) & \sin(\beta_{hw}) & 0 \\ -\sin(\beta_{hw}) & \cos(\beta_{hw}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_w \\ M_w \\ N_{MR} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Dans le repère "corps" les moments créés par le rotor sont calculés comme :

$$\underline{M}_M^{(B)} = \text{Rot}_{B \leftarrow \mathcal{H}} \underline{M}_M^{(\mathcal{H})} + [\vec{r}_{bh}^{(B)}] \underline{F}_M^{(B)} = (\text{Rot}_{\mathcal{H} \leftarrow B})^T \underline{M}_M^{(\mathcal{H})} + [\vec{r}_{bh}^{(B)}] \underline{F}_M^{(B)} \quad (2.100)$$

Le développement analytique des expressions (2.96), (2.97) et (2.98) est présenté par les relations (2.101), (2.102) et (2.103) respectivement.

$$\begin{aligned}
 L_w = & \frac{n_B}{2} \left(K_\beta b_{lw} - \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{g} (\ddot{b}_{lw} - 2\dot{a}_{lw} \Omega_M - b_{lw} \Omega_M^2) \right) - \\
 & - \frac{n_B}{2} \rho a c r_M^4 \Omega_M^2 \bar{\varepsilon} \left\{ \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon}^2)}{2} \left(\theta_0 - \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} a_0 \right) - \left[\frac{(1-\bar{\varepsilon}^3)}{6} + \frac{3\mu^2(1-\bar{\varepsilon})}{8} \right] \left(B_{lw} - \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} b_{lw} \right) + \right. \\
 & + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon}^3)}{3} \theta_1 - \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \frac{(2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3)}{12} \left(\frac{\dot{b}_{lw}}{\Omega_M} - a_{lw} \right) + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})}{8} a_{lw} + \\
 & \left. + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})\lambda_0}{2} + \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)\lambda_s}{4} + \frac{(1-\bar{\varepsilon}^3)}{6} \underbrace{\left[P_h \cos(\beta_{hw}) + Q_h \sin(\beta_{hw}) \right]}_{P_{hw}} \right\} \frac{1}{\Omega_M} \quad (2.101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_w = & \frac{n_B}{2} \left(K_\beta a_{lw} - \frac{\bar{\varepsilon} r_M M_\beta}{g} (\ddot{a}_{lw} + 2\dot{b}_{lw} \Omega_M - a_{lw} \Omega_M^2) \right) - \\
 & - \frac{n_B}{2} \rho a c r_M^4 \Omega_M^2 \bar{\varepsilon} \left\{ - \left[\frac{(1-\bar{\varepsilon}^3)}{6} + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})}{8} \right] \left(A_{lw} - \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} a_{lw} \right) - \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} a_0 + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})}{8} b_{lw} + \right. \\
 & \left. + \frac{(2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3)}{12} \left(\frac{\dot{b}_{lw}}{\Omega_M} - b_{lw} \right) + \frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)\lambda_s}{4} + \frac{(1-\bar{\varepsilon}^3)}{6} \underbrace{\left[-P_h \sin(\beta_{hw}) + Q_h \cos(\beta_{hw}) \right]}_{Q_{hw}} \right\} \frac{1}{\Omega_M} \quad (2.102)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{MR} = & \frac{n_B}{2} \rho a c r_M^4 \Omega_M^2 \left\{ \frac{C_{D_0}}{4a} \left[\frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4}{3} + \mu^2(1-\bar{\varepsilon})^2 \right] - \left(\theta_0 - \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} a_0 \right) \left[\frac{2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3}{6} \lambda_0 + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} \lambda_s - \right. \right. \\
 & - \frac{3-8\bar{\varepsilon}+6\bar{\varepsilon}^2-\bar{\varepsilon}^4}{12} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^3}{6} \frac{\dot{b}_{lw}}{\Omega_M} + \mu \frac{\bar{\varepsilon}(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} a_{lw} + \frac{\mu(2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3)}{12} \underbrace{\left[P_h \cos(\beta_{hw}) + Q_h \sin(\beta_{hw}) \right]}_{P_{hw}} \left. \right\} \frac{1}{\Omega_M} + \\
 & + \frac{A_{lw} - \underbrace{\tan(\delta_3)}_{K_1} a_l}{12} \left[\frac{3-8\bar{\varepsilon}+6\bar{\varepsilon}^2-\bar{\varepsilon}^4}{2} \left(\frac{\dot{a}_{lw}}{\Omega_M} + b_{lw} \right) + \frac{3\mu^2(1-\bar{\varepsilon}^2)}{4} b_{lw} - \mu(2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3) a_0 + (2+\bar{\varepsilon})(1-\bar{\varepsilon})^2 \lambda_s + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4}{2} \frac{\overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_{w'}})+Q_h \cos(\beta_{h_{w'}})}^{Q_{hw}}}{\Omega_M} \left] + \left(B_{lw'} - \overbrace{\tan(\delta_3)}^{K_1} b_1 \right) \left[\frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4}{24} \frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_{w'}})+Q_h \sin(\beta_{h_{w'}})}^{P_{hw}}}{\Omega_M} - \right. \\
& - \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^3}{6} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \frac{3-8\bar{\varepsilon}+6\bar{\varepsilon}^3-\bar{\varepsilon}^4}{24} \left(\frac{\dot{b}_{lw'}}{\Omega_M} - a_{lw'} \right) + \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})^2}{16} a_{lw'} + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} \lambda_0 + \frac{(2+\bar{\varepsilon})(1-\bar{\varepsilon})^2}{12} \lambda_s \left. \right] + \\
& + \theta_1 \left[\frac{6-15\bar{\varepsilon}+10\bar{\varepsilon}^2-\bar{\varepsilon}^3}{30} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} - \frac{\mu(3-8\bar{\varepsilon}+6\bar{\varepsilon}^2-\bar{\varepsilon}^4)}{24} \frac{\dot{b}_{lw'}}{\Omega_M} - \frac{\mu\bar{\varepsilon}(2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3)}{12} a_{lw'} - \frac{\mu(2+\bar{\varepsilon})(1-\bar{\varepsilon})^2}{12} \lambda_s - \right. \\
& - \frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4}{12} \lambda_0 - \frac{\mu(3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4)}{24} \frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_{w'}})+Q_h \sin(\beta_{h_{w'}})}^{P_{hw}}}{\Omega_M} \left. \right] - \frac{\mu^2(1-\bar{\varepsilon})^2}{16} (4a_0^2 + 3a_{lw'}^2 + b_{lw'}^2) - \\
& - \frac{(1-\bar{\varepsilon})^4}{8} \left[2 \left(\frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} \right)^2 + \left(\frac{\dot{a}_{lw'}}{\Omega_M} + b_{lw'} \right)^2 + \left(\frac{\dot{b}_{lw'}}{\Omega_M} - a_{lw'} \right)^2 \right] + 2\lambda_0 \frac{(1-\bar{\varepsilon})^3}{3} \frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^3}{3} \left(\frac{\dot{a}_0}{\Omega_M} a_{lw'} + \frac{\dot{a}_{lw'}}{\Omega_M} a_0 \right) - \\
& - \frac{3-8\bar{\varepsilon}+6\bar{\varepsilon}^3-\bar{\varepsilon}^4}{12} \left[\left(\frac{\dot{b}_{lw'}}{\Omega_M} - a_{lw'} \right) \frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_{w'}})+Q_h \sin(\beta_{h_{w'}})}^{P_{hw}}}{\Omega_M} + \left(\frac{\dot{a}_{lw'}}{\Omega_M} + b_{lw'} \right) \frac{\overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_{w'}})+Q_h \cos(\beta_{h_{w'}})}^{Q_{hw}}}{\Omega_M} \right] - \\
& - \frac{\lambda_0(1-\bar{\varepsilon})^2}{2} (\lambda_0 + \mu a_{lw'}) + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^3}{3} a_0 b_{lw'} + \frac{\mu(2-3\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^3)}{6} a_0 \frac{\overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_{w'}})+Q_h \cos(\beta_{h_{w'}})}^{Q_{hw}}}{\Omega_M} \\
& - \frac{3-4\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4}{24} \left[\left(\frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_{w'}})+Q_h \sin(\beta_{h_{w'}})}^{P_{hw}}}{\Omega_M} \right)^2 + \left(\frac{\overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_{w'}})+Q_h \cos(\beta_{h_{w'}})}^{Q_{hw}}}{\Omega_M} \right)^2 \right] - \\
& - \frac{(1-\bar{\varepsilon})^3}{3} \left[\left(\frac{\dot{a}_{lw'}}{\Omega_M} + b_{lw'} \right) \lambda_c + \left(\frac{\dot{b}_{lw'}}{\Omega_M} - a_{lw'} \right) \lambda_s \right] + \frac{\mu(1-\bar{\varepsilon})^2}{2} a_0 \lambda_c - \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{4} (\lambda_c^2 + \lambda_s^2) + \\
& + \frac{(2+\bar{\varepsilon})(1-\bar{\varepsilon})^2}{6} \left[\frac{\overbrace{P_h \cos(\beta_{h_{w'}})+Q_h \sin(\beta_{h_{w'}})}^{P_{hw}}}{\Omega_M} \lambda_s + \frac{\overbrace{-P_h \sin(\beta_{h_{w'}})+Q_h \cos(\beta_{h_{w'}})}^{Q_{hw}}}{\Omega_M} \lambda_c \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

(2.103)

2.6 Modèle du rotor de queue

Le rotor de queue fonctionne dans un écoulement d'air complexe, en particulier lors d'un vol à vitesse réduite, près du sol, lors d'un vol latéral et lors de la transition du vol stationnaire vers un vol en palier. Le sillage du rotor principal, ainsi que l'interaction de l'écoulement d'air de l'empennage avec le rotor de queue créent un flux fortement non-uniforme qui peut dominer les réponses du modèle du rotor de queue. Supposant le rotor de queue comme un rotor de balancement (en anglais *teetering rotor*), avec un angle de conicité α_{0T} constant, une première approximation consiste à ignorer les effets non-uniformes décrits ci-dessus. Étant donné que la vitesse de rotation du rotor de queue est suffisamment grande ($\approx 3\Omega_M$), la dynamique de l'extrémité de la pale peut être ignorée et le rotor trouve son régime établi instantanément.

Soit \vec{V}_T la vitesse de l'origine du repère du rotor de queue et $(\underline{\text{cgt}}) = \begin{bmatrix} l_t \\ b_t \\ h_t \end{bmatrix}$ sa position

dans le repère du constructeur. L'hélicoptère UH-60 de Sikorsky est conçu avec un rotor de queue incliné sur le tribord du stabilisateur vertical, dont l'orientation est obtenue comme une rotation de $\Phi_{TR} = 20^\circ$ par rapport à $\vec{i}_{E'}$. Pour le développement des forces et des moments aérodynamiques, nous avons introduit deux repères additionnels "rotor de queue" T et "rotor de queue - vent" WT .

Pour le vecteur $\vec{r}_{bt}^{(B)}$, la vitesse \vec{V}_T et le taux d'avancement μ_T , nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \underline{r}_{bt}^{(B)} &= \text{Rot}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{O}} \underline{r}_{bt}^{(\mathcal{O})} = \text{Rot}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{O}} (\underline{r}_{ot}^{(\mathcal{O})} - \underline{r}_{ob}^{(\mathcal{O})}) \\ \underline{r}_{bt}^{(B)} &= \begin{bmatrix} l_{TR} \\ b_{TR} \\ h_{TR} \end{bmatrix} = \text{Rot}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{O}} (\underline{\text{cgt}} - (\underline{\text{cgb}} + \underline{\Delta \text{cgb}})) = \text{Rot}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{O}} \left(\begin{bmatrix} l_t \\ b_t \\ h_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_b + \Delta l_b \\ b_b + \Delta b_b \\ h_b + \Delta h_b \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{V}}_T^{(T)} &= \text{Rot}_{T \leftarrow B} \left[\underbrace{\bar{\mathbf{V}}_{bl}^{(B)} + (\bar{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} \times \bar{\mathbf{r}}_{bl}^{(B)})}_{\bar{\mathbf{V}}_T^{(B)}} \right] \\ \underline{\mathbf{V}}_T^{(T)} &= \begin{bmatrix} U_t \\ V_t \\ W_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\Phi_{TR}} & S_{\Phi_{TR}} \\ 0 & -S_{\Phi_{TR}} & C_{\Phi_{TR}} \end{bmatrix}}_{\text{Rot}_{T \leftarrow B}} \left\{ \begin{bmatrix} U_b \\ V_b \\ W_b \end{bmatrix} + [\bar{\boldsymbol{\omega}}_{B \rightarrow T}^{(B)}] \begin{bmatrix} l_{TR} \\ b_{TR} \\ h_{TR} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.105)\end{aligned}$$

$$\mu_T = \frac{\sqrt{U_t^2 + V_t^2}}{\Omega_T r_T} \quad (2.106)$$

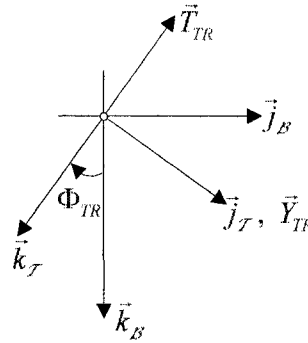


Figure 2.13 Orientation du rotor de queue (UH – 60 de Sikorsky)

Avec un angle de glissement β_{t_w} et α_{t_w} l'angle d'incidence par rapport au plan du rotor de queue de rayon r_T , la vitesse angulaire dans le repère "rotor de queue - vent" est calculée comme :

$$\beta_{t_w} = \tan^{-1} \left(\frac{V_t}{U_t} \right); \quad \alpha_{t_w} = \tan^{-1} \left(\frac{W_t}{\sqrt{U_t^2 + V_t^2}} \right) \quad (2.107)$$

$$\begin{bmatrix} P_{t_w} \\ Q_{t_w} \\ R_{t_w} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\beta_{t_w}) & \sin(\beta_{t_w}) & 0 \\ -\sin(\beta_{t_w}) & \cos(\beta_{t_w}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rot}_{yT \leftarrow T}} \begin{bmatrix} P_t \\ Q_t \\ R_t \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} P_t \\ Q_t \\ R_t \end{bmatrix} = \text{Rot}_{T \leftarrow B} \begin{bmatrix} P_b \\ Q_b \\ R_b \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Les expressions de battement longitudinale (a_{1T_w}) et latéral (b_{1T_w}) sont calculés par (2.109) :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{K}}_{TR} \begin{bmatrix} a_{1T_w} \\ b_{1T_w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underbrace{\tan(\delta_{3TR})}_{K_{1TR}} \left(1 + \frac{3}{2} \mu_T^2\right) & -\left(1 + \frac{\mu_T^2}{2}\right) \\ \left(1 - \frac{\mu_T^2}{2}\right) & \underbrace{\tan(\delta_{3TR})}_{K_{1TR}} \left(1 + \frac{\mu_T^2}{2}\right) \end{bmatrix} f_{TR} \\
 \tilde{\mathbb{K}}_{TR} &= \text{diag} \left(1 - \frac{\mu_T^4}{4} + \left(\underbrace{\tan(\delta_{3TR})}_{K_{1TR}} \right)^2 \left(1 + \frac{\mu_T^2}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \mu_T^2 \right) \right) \\
 f_{TR} &= \frac{4}{3} \mu_T \left[\underbrace{2 \tan(\delta_{3TR})}_{K_{1TR}} \right] a_{0T} - \underbrace{\frac{1}{\rho c_{TR} a_{TR} r_T^4}}_{I_{\beta TR}} \left[\begin{array}{cc} 16 & 1 \\ 1 & -16 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{P_w}{\Omega_T} \\ \frac{Q_w}{\Omega_T} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_T \left(\frac{8}{3} \theta_{0T} + 2\theta_{1T} + 2\lambda_{TR} \right) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

où θ_{0T} et θ_{1T} sont respectivement le pas collectif et la torsion initiale de la pale du rotor de queue. La vitesse induite normalisée du rotor de queue λ_{TR} peut être exprimée sous la forme générale (2.109) en fonction du coefficient de la portance du rotor de queue $C_{T_{TR}}$:

$$\lambda_{TR} = \frac{v_t}{\Omega_T r_T} = \frac{W_t}{\Omega_T r_T} - \frac{C_{T_{TR}}}{2\sqrt{\mu_T^2 + \lambda_{TR}^2}} \tag{2.110}$$

Les forces aérodynamiques et le rotor anti-couple dans le repère "rotor de queue - vent" sont calculés par les expressions (2.111), (2.112), (2.113) et (2.114).

$$\begin{aligned}
 T_T &= \frac{n_{BT}}{2} \rho a_{TR} c_{TR} r_T^3 \Omega_T^2 \left[\frac{\lambda_{TR}}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_T^2}{2} \right) \theta_{0T} + \frac{(1 + \mu_T^2)}{4} \theta_{1T} - \right. \\
 &\quad \left. - \underbrace{\tan(\delta_{3TR})}_{K_{1TR}} \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_T^2}{2} \right) a_{0T} + \mu_T \frac{\underbrace{\tan(\delta_{3TR})}_{K_{1TR}} b_{1T_w}}{2} + \frac{\mu_T P_w}{4 \Omega_T} \right]
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\begin{aligned}
H_{WT} = & \frac{n_{BT}}{2} \rho a_{TR} c_{TR} r_I^3 \Omega_T^2 \left\{ \frac{\mu_T C_{D_{0TR}}}{2 a_{TR}} - \frac{\overbrace{\theta_{0T} - \tan(\delta_{3TR}) a_{0T}}^{K_{1TR}}}{4} \left(2\mu_T \lambda_{0T} - \frac{4}{3} a_{1T_W} \right) - \right. \\
& - \frac{\theta_{1T}}{4} (\mu_T \lambda_{0T} - a_{1T_W}) - \frac{\overbrace{\tan(\delta_{3TR})}^{K_{1TR}}}{4} \left[\frac{2}{3} a_{0T} a_{1T_W} + b_{1T_W} (\lambda_{0T} - \mu_T a_{1T_W}) \right] + \\
& + \frac{3}{4} \lambda_{0T} a_{1T_W} - \frac{a_{0T} b_{1T_W}}{6} + \frac{\mu_T}{4} (a_{0T}^2 + a_{1T_W}^2) - \left(\frac{\overbrace{\theta_{0T} - \tan(\delta_{3TR}) a_{0T}}^{K_{1TR}}}{6} + \frac{\theta_{1T}}{8} + \right. \\
& \left. + \mu_T \frac{\overbrace{3 \tan(\delta_{3TR})}^{K_{1TR}}}{16} b_{1T_W} + \frac{\lambda_{0T}}{2} + \frac{\mu_T a_{1T_W}}{16} \right) \cdot \frac{\overbrace{P_t \cos(\beta_{t_W}) + Q_t \sin(\beta_{t_W})}^{P_W}}{\Omega_T} - \\
& \left. - \left(\mu_T \frac{\overbrace{\tan(\delta_{3TR})}^{K_{1TR}}}{16} a_{1T_W} + \frac{a_{0T}}{6} + \frac{\mu_T b_{1T_W}}{16} \right) \frac{\overbrace{-P_t \sin(\beta_{h_W}) + Q_t \cos(\beta_{h_W})}^{Q_W}}{\Omega_T} \right\} \quad (2.112)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{WT} = & \frac{n_{BT}}{2} \rho a_{TR} c_{TR} r_I^3 \Omega_T^2 \left\{ \frac{\overbrace{\theta_{0T} - \tan(\delta_{3TR}) a_{0T}}^{K_{1TR}}}{4} \left[\left(\frac{4}{3} + 2\mu_T^2 \right) b_{1T_W} - 3\mu_T a_{0T} \right] + \right. \\
& + \theta_{1T} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu_T^2}{4} \right) b_{1T_W} - \frac{\mu_T}{2} a_{0T} \right] + \left(\frac{\overbrace{\theta_{0T} - \tan(\delta_{3TR}) a_{0T}}^{K_{1TR}}}{6} + \frac{\theta_{1T}}{8} + \mu_T \frac{\tan(\delta_{3TR})}{16} b_{1T_W} + \right. \\
& + \frac{\lambda_{0T}}{2} + \mu_T \frac{7}{16} a_{1T_W} \left. \right) \frac{\overbrace{-P_t \sin(\beta_{h_W}) + Q_t \cos(\beta_{h_W})}^{Q_W}}{\Omega_T} + \frac{3\lambda_{0T} b_{1T_W}}{4} + \left(\frac{1}{6} - \mu_T^2 \right) a_{0T} a_{1T_W} + \quad (2.113) \\
& + \left[-\frac{a_{0T}}{6} + \frac{\mu_T}{16} (\tan(\delta_{3TR}) a_{1T_W} + 5b_{1T_W}) \right] \frac{\overbrace{P_t \cos(\beta_{t_W}) + Q_t \sin(\beta_{t_W})}^{P_W}}{\Omega_T} - \frac{\mu_T}{4} (6\lambda_{0T} a_{0T} - \\
& - a_{1T_W} b_{1T_W}) + \tan(\delta_{3TR}) \left[\frac{a_{1T_W}}{4} (\lambda_{0T} + \mu_T a_{1T_W}) - b_{1T_W} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_T^2}{2} \right) a_{0T} + \frac{\mu_T}{2} b_{1T_W}^2 \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{TR} = & \frac{n_{BT}}{2} \rho a_{TR} c_{TR} r_T^4 \Omega_T^2 \left\{ \frac{C_{D_{0TR}}}{4a_{TR}} (1 + \mu_T^2) - \frac{\theta_{0T} - \overbrace{\tan(\delta_{3TR})}^{K_{1TR}} a_{0T}}{3} \lambda_{0T} - \frac{\theta_{1T} \lambda_{0T}}{4} - \right. \\
& - \left[\frac{\mu_T}{6} \left(\theta_{0T} - \overbrace{\tan(\delta_{3TR})}^{K_{1TR}} a_{0T} \right) + \frac{\mu_T}{8} \theta_{1T} + \frac{\overbrace{\tan(\delta_{3TR})}^{K_{1TR}}}{8} b_{1Tw} - \frac{a_{1Tw}}{4} \right] \frac{\overbrace{P_t \cos(\beta_{tw}) + Q_t \sin(\beta_{tw})}^{P_{tw}}}{\Omega_T} - \\
& - \overbrace{\tan(\delta_{3TR})}^{K_{1TR}} \left[a_{1Tw} \left(-\frac{\mu_T a_{0T}}{6} + \frac{b_{1Tw}}{8} + \frac{\mu_T^2}{16} b_{tw} \right) + b_{1Tw} \left(\frac{\mu_T \lambda_{0T}}{4} - \frac{a_{1Tw}}{8} + \frac{\mu_T^2 a_{1Tw}}{16} \right) \right] + \\
& + \left(\frac{\mu_T a_{0T}}{3} - \frac{\overbrace{\tan(\delta_{3TR})}^{K_{1TR}}}{8} a_{1Tw} - \frac{b_{1Tw}}{4} \right) \frac{\overbrace{-P_t \sin(\beta_{tw}) + Q_t \cos(\beta_{tw})}^{Q_{tw}}}{\Omega_T} - \\
& - \frac{\mu_T^2}{16} (4a_{0T}^2 + 3a_{1Tw}^2 + b_{1Tw}^2) - \frac{\lambda_{0T}}{2} (\lambda_{0T} + \mu_T a_{1Tw}) + \frac{\mu_T}{3} a_{0T} b_{1Tw} - \\
& - \frac{1}{8} [a_{1Tw}^2 + b_{1Tw}^2] - \frac{1}{8} \left[\left(\frac{P_t \cos(\beta_{tw}) + Q_t \sin(\beta_{tw})}{\Omega_T} \right)^2 + \left(\frac{-P_t \sin(\beta_{tw}) + Q_t \cos(\beta_{tw})}{\Omega_T} \right)^2 \right] \left. \right\} \quad (2.114)
\end{aligned}$$

Selon l'approximation S6, le coefficient de traînée $C_{D_{0TR}}$ dans l'expression de la force de traînée (2.112) et du rotor couple (2.114) est calculé comme une fonction quadratique du coefficient de portance du rotor de queue C_{TTR} :

$$C_{DT} = k_{D_{0T}} + k_{D_{VT}} C_{TTR}^2 \quad (2.115)$$

Dans le repère "corps" les efforts créés par le rotor de queue sont calculées à partir des expressions (2.116) et (2.117) :

$$\mathbf{F}_T^{(B)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\Phi_{TR}} & -S_{\Phi_{TR}} \\ 0 & S_{\Phi_{TR}} & C_{\Phi_{TR}} \end{bmatrix}}_{\text{Rot}_{B \leftarrow T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\beta_{tw}) & -\sin(\beta_{tw}) & 0 \\ \sin(\beta_{tw}) & \cos(\beta_{tw}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rot}_{T \leftarrow VT}} \underbrace{\begin{bmatrix} -H_{WT} \\ Y_{WT} \\ -T_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_T^{(T)}} \quad (2.116)$$

$$\mathbf{M}_T^{(B)} = (\text{Rot}_{B \leftarrow T})^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{TR} \end{bmatrix}^T + [\vec{r}_{bt}^{(B)}] \mathbf{F}_T^{(B)} \quad (2.117)$$

2.7 Modèle atmosphérique

La pression, la densité d'air et la température ont une importante influence sur les paramètres aérodynamiques de chaque aéronef. Étant donné que les hélicoptères volent à vitesse subsonique et dans la troposphère (sous 36000 pieds), la température moléculaire T_{mol} et la pression atmosphérique p_{atm} statique peuvent être calculées par (2.118) :

$$\begin{aligned} T_{mol} &= T_{mol0} + T_{mol1} h_{alt} \\ p_{atm} &= e^{\frac{\ln(p_0) - \frac{g_0}{T_{mol1} R_{gaz}} \ln\left(\frac{T_{mol}}{T_{mol0}}\right)}{1}} \end{aligned} \quad (2.118)$$

avec $T_{mol0} = 288,15$ [K] - la température au niveau de référence (de la mer),
 $p_0 = 101325$ [N m⁻²] ou [Pa] est la pression statique de référence,
 $g_0 = 9,80665$ [m s⁻²] - l'accélération de gravité de référence, h_{alt} - l'altitude en mètres,
 $T_{mol1} = -0,00651122$ - le gradient de température et $R_{gaz} = 287,039$ [J K⁻¹ kg⁻¹] - la constante spécifique du gaz.

2.8 Linéarisation du modèle. Dérivés de stabilité et de commande.

L'étude détaillée de la stabilité et de la commande d'hélicoptère est une question complexe qui est au delà des objectifs de cette recherche. Par conséquent, une approche plus simple sera adoptée, se servant de plusieurs simplifications usuelles : la vitesse du rotor demeure constante ; dans les conditions de vol d'équilibre, la dynamique perturbée du rotor est le résultat d'une série de conditions de vol établies ; le rotor est considéré comme un système répondant instantanément à la vitesse linéaire et angulaire du centre de masse de l'hélicoptère. La théorie de stabilité et de commande de vol vise principalement à trouver les facteurs impliqués dans la conception des qualités de vol et en général à faire une évaluation précise de la réponse d'un aéronef aux entrées de commande et aux facteurs de perturbations. Le rotor principal fournit la plus grande

contribution à la stabilité de l'hélicoptère et sa dynamique (principalement de battement) est la plus importante.

Les dérivés de stabilité et de commande sont attribués à George Hartley Bryan qui, en 1911, les a développés pour étudier la stabilité des avions. En utilisant sa méthode, la variation d'une force aérodynamique ou d'un moment correspondant est exprimée en série de Taylor des variables indépendantes. Pour développer le modèle linéaire de stabilité et de commande, seulement les premiers termes sont maintenus. Pour notre système, les variables indépendantes sont subdivisées en : variables principales \underline{x}_B , variables d'ordre supérieur \underline{x}_R , variables de commande \underline{x}_C et variables de perturbations atmosphériques \underline{x}_p . Par convention, les principales variables indépendantes utilisées sont les vitesses linéaires (u_b, v_b, w_b) et angulaires (p_b, q_b, r_b) du centre de masse d'aéronef et l'attitude du fuselage $(\Phi_b, \Theta_b, \Psi_b)$. Les variables de la commande sont $(\theta_0, A_{1C}, B_{1S}, \theta_{0T})$ et les vitesses linéaires (u_g, v_g, w_g) , et angulaires (p_g, q_g, r_g) des rafales sont vues comme perturbations atmosphériques. Les variables d'état du système de commande peuvent être exprimées en tant que déplacements des leviers du pilote $\underline{u} = (\eta_{coll}, \eta_{lat}, \eta_{long}, \eta_{pedal})^T$ ou angles de pas des pales $[\theta_0, \theta_{1C}, \theta_{1S}, \theta_{TR}]$. Chaque ensemble de variable semble adéquat, mais les déplacements des leviers $(\eta_{coll}, \eta_{lat}, \eta_{long}, \eta_{pedal})$ et la perception du pilote (attitude, position et déplacements par rapport au repère inertiel) avec $\underline{x}_I = (u_i, v_i, h = -w_i, \phi_b, \theta_b, \psi_b, p_b, q_b, r_b)$ est le plus conforme aux critères de la qualité de vol. Pour l'hélicoptère, les variables d'ordre supérieur incluent les variables de la dynamiques du rotor principal (de battement, de traînée, de torsion des pales), les variables de la dynamique de la vitesse induite et modes de torsion de la cellule. L'application des lois de mouvement de Newton à un hélicoptère en vol mène à un ensemble d'équations non linéaires décrivant l'évolution de la trajectoire et de l'attitude du giravion avec le temps. Le mouvement est attribué à un système orthogonal, fixé au centre de masse du fuselage. Dans la section 2.4 et la section

2.5 nous avons discuté comment ces équations pouvaient être combinées ensemble sous la forme d'équations différentielles non linéaires de premier ordre :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_B &= f_B(\underline{x}_B, \underline{x}_R, \underline{x}_C, \underline{x}_P, t) \\ \dot{\underline{x}}_R &= f_R(\underline{x}_B, \underline{x}_R, \underline{x}_C, \underline{x}_P, t)\end{aligned}\quad (2.119)$$

La dimension du système dynamique dépend du nombre de degrés de liberté inclus. Pour le moment, nous considérerons le cas général de dimension $[\underline{x}_B, \underline{x}_R, \underline{x}_C]^T \in \mathbb{R}^n$. La solution de l'équation (2.119) dépend des conditions initiales du vecteur d'état, de la

variation de temps de la fonction de vecteur $f_{BR} = \begin{cases} f_B(\underline{x}_B, \underline{x}_R, \underline{x}_C, t) \\ f_R(\underline{x}_B, \underline{x}_R, \underline{x}_C, t) \end{cases}$ et de la dynamique

de l'actionnement du rotor principal et du rotor de queue, introduite par la fonction de transfert $G_A(s) M_{ix}$, dont la réalisation interne dans l'espace d'état sera approximée par

$$\begin{bmatrix} -k_A I_4 & M_{ix} \\ k_A I_4 & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}. \text{ Généralement, l'actionnement du plateau cyclique/plateau collectif}$$

inclus le modèle des commandes de vol électriques [figure 2.14](#) (en anglais *fly-by-wire*), mais ces derniers ne seront pas pris en compte pour ne pas augmenter d'avantage l'ordre du système.

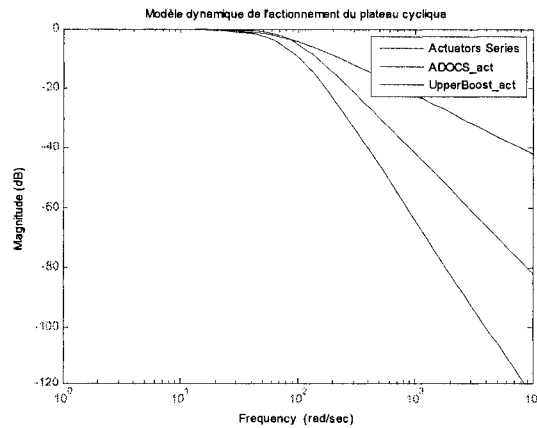


Figure 2.14 Lieu de Bode de l'actionnement du plateau cyclique

Le système de commande utilise l'interface schématisé de découplage statique M_{ix} à la figure 2.15 et impose comme entrées de commande les déplacements des leviers de commande dans la cabine : longitudinal η_{long} , latéral η_{lat} , collectif η_{coll} et palonnier η_{pedal} .

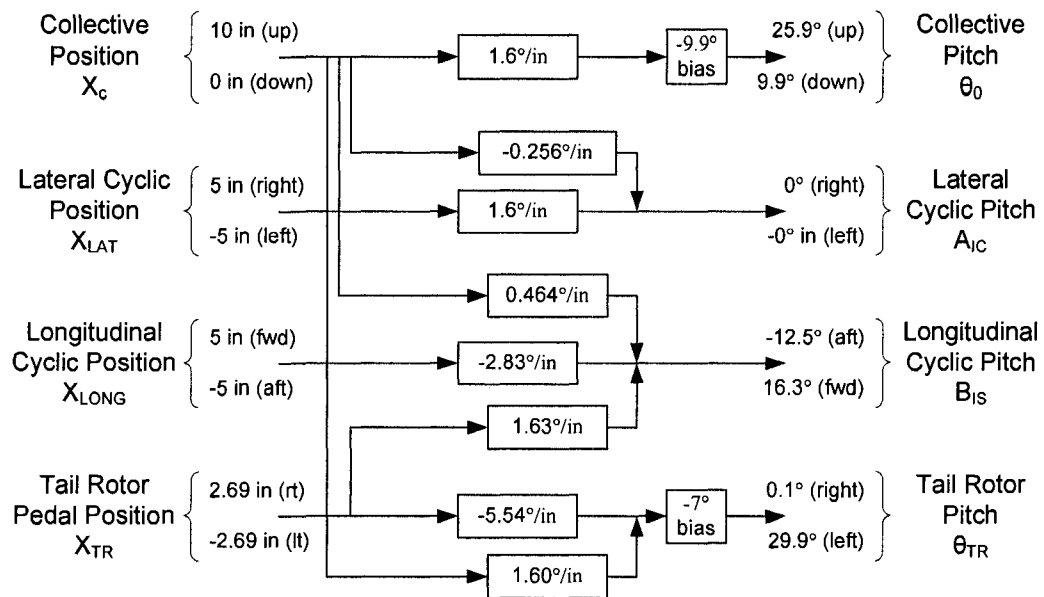


Figure 2.15 Interface schématisé de découplage statique [JC91]

Malheureusement, les solutions analytiques des équations non linéaires générales (2.119) sont extrêmement complexes et leurs applications sont limitées. Ce n'est pas le cas des approximations linéaires du mouvement non linéaire général. Le principe de la linéarisation est la condition que le mouvement peut être considéré comme perturbation par rapport à l'équilibre ou à un état d'équilibre,

$$\underline{X} = \underline{X}_E + \delta \underline{x} \quad (2.120)$$

supposant que les perturbations sont petites, et que les forces et les moments externes peuvent être représentés en tant que fonctions analytiques des variables perturbées et de leurs dérivées. Le théorème de Taylor implique, que si le vecteur des forces et des

moments (fonctions des charges aérodynamiques) et toutes leurs dérivées sont connus à n'importe quel point (l'état d'équilibre), le comportement de la fonction (2.119), n'importe où dans sa partie analytique, peut être estimé à partir d'une expansion de la fonction en série, aux environs du point connu. Les forces et les moments peuvent alors être écrits sous la forme approximative :

$$\begin{bmatrix} \sum \underline{F}^{(B)} \\ \sum \underline{M}^{(B)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_E \\ \underline{M}_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}_B} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{x}_B} \end{bmatrix} \delta \underline{x}_B + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \dot{\underline{x}}_B} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \dot{\underline{x}}_B} \end{bmatrix} \delta \dot{\underline{x}}_B + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}_R} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{x}_R} \end{bmatrix} \delta \underline{x}_R + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \dot{\underline{x}}_R} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \dot{\underline{x}}_R} \end{bmatrix} \delta \dot{\underline{x}}_R + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}_C} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{x}_C} \end{bmatrix} \delta \underline{x}_C + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \dot{\underline{x}}_C} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \dot{\underline{x}}_C} \end{bmatrix} \delta \dot{\underline{x}}_C + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}_P} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{x}_P} \end{bmatrix} \delta \underline{x}_P \quad (2.121)$$

La fonction (2.121) peut être habituellement augmentée avec la dynamique de l'actionnement du rotor principal et du rotor de queue et écrite comme matrice de transfert $G_B(s)$ ou matrice de transfert $G_{B+P}(s)$ avec perturbation atmosphérique, dans l'espace d'état sous la forme matricielle (2.122) :

$$\begin{cases} \underline{E}_B \delta \dot{\underline{x}}_B = \underline{A}_{BB} \delta \underline{x}_B + \underline{A}_{BR} \delta \underline{x}_R + k_A \underline{A}_{BC} \delta \underline{x}_C + \underline{B}_{BP} \delta \underline{x}_P \\ \underline{E}_R \delta \dot{\underline{x}}_R = \underline{A}_{RB} \delta \underline{x}_B + \underline{A}_{RR} \delta \underline{x}_R + k_A \underline{A}_{RC} \delta \underline{x}_C + \underline{B}_{RP} \delta \underline{x}_P \\ \delta \dot{\underline{x}}_C = -k_A I_4 \underline{x}_C + M_{ix} \delta \underline{u} \\ y = \delta \underline{x}_B \end{cases} \quad (2.122)$$

$$\begin{cases} \underline{E}_B \delta \dot{\underline{x}}_B = \underline{A}_{BB} \delta \underline{x}_B + \underline{A}_{BR} \delta \underline{x}_R + k_A \underline{A}_{BC} \delta \underline{x}_C \\ \underline{E}_R \delta \dot{\underline{x}}_R = \underline{A}_{RB} \delta \underline{x}_B + \underline{A}_{RR} \delta \underline{x}_R + k_A \underline{A}_{RC} \delta \underline{x}_C \\ \delta \dot{\underline{x}}_C = -k_A I_4 \underline{x}_C + M_{ix} \delta \underline{u} \\ y = \delta \underline{x}_B \end{cases}$$

$$\underline{A}_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}_B} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{x}_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_B = \underline{x}_{BE} \\ \underline{x}_R = \underline{x}_{RE} \\ \underline{x}_C = \underline{x}_{CE} \end{Bmatrix} ; \underline{A}_{BR} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}_R} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{x}_R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_B = \underline{x}_{BE} \\ \underline{x}_R = \underline{x}_{RE} \\ \underline{x}_C = \underline{x}_{CE} \end{Bmatrix} ; \underline{A}_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}_C} \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{x}_C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_B = \underline{x}_{BE} \\ \underline{x}_R = \underline{x}_{RE} \\ \underline{x}_C = \underline{x}_{CE} \end{Bmatrix} \quad (2.123)$$

$$\underline{A}_{RB} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \underline{x}_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_B = \underline{x}_{BE} \\ \underline{x}_R = \underline{x}_{RE} \\ \underline{x}_C = \underline{x}_{CE} \end{Bmatrix} ; \underline{A}_{RR} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \\ -\tilde{K} & -\tilde{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_B = \underline{x}_{BE} \\ \underline{x}_R = \underline{x}_{RE} \\ \underline{x}_C = \underline{x}_{CE} \end{Bmatrix} ; \underline{A}_{RC} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \underline{x}_C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_B = \underline{x}_{BE} \\ \underline{x}_R = \underline{x}_{RE} \\ \underline{x}_C = \underline{x}_{CE} \end{Bmatrix}$$

La condition que les charges aérodynamiques soient des fonctions analytiques des variables perturbées est généralement valide (l'hystérésis et les discontinuités des charges aérodynamiques sont des exemples du comportement non-analytique). La validité de la linéarisation dépend du comportement des forces à petite amplitude, c'est-à-dire quand la déviation (de la valeur d'équilibre) de la commande ou la perturbation deviennent très petites, l'effet linéaire devient dominant.

2.9 Les équations d'équilibre

Les équations vectorielles du mouvement d'un aéronef sont normalement résolues dans un des repères : corps, stabilité ou vent \mathcal{W} qui correspondent au trois type de système d'équilibrage de la soufflerie. Si le système d'équilibrage est aligné avec la ligne centrale de la soufflerie, les mesures (et les dérivés de stabilité) sont données dans le repère "vent"; pour produire les conditions de dérapage, le système d'équilibrage est monté sur une base tournante en lacet et le repère en question est le repère "stabilité"; et dernièrement si le système tensiométrique est fixé à l'intérieur d'hélicoptère, le système de balance est dite "corps". Traitant de la cinématique d'abord, en se plaçant dans le repère "corps" \mathcal{B} , on a la somme vectorielle suivante :

$$\vec{V}_{bi} = \vec{V}_{bw} + \vec{V}_{wi}^{(B)} = \vec{V}_{f_E}^{(B)} + \Delta\vec{V} \quad (2.124)$$

avec \vec{V}_{bw} la vitesse de vol par rapport au l'air, $\vec{V}_{wi}^{(B)}$ la vitesse de l'air par rapport au repère inertiel, \vec{V}_{f_E} la vitesse d'équilibre et $\Delta\vec{V}$ la déviation de la vitesse d'équilibre. Si $|\vec{V}_{f_E}|$ est la norme du vecteur de la vitesse d'équilibre, (Φ_E, Θ_E) les angles de roulis et de tangage en équilibre, β_E l'angle de glissade (en anglais *side slip angle*), α_E l'angle de la trajectoire par rapport au l'horizon, Ω_E le taux de rotation (présentée à la figure 2.16). Les composantes de la vitesse d'équilibre dans le repère "corps" (\mathcal{B}) ont la forme :

$$\begin{aligned}
U_E &= |\vec{V}_{f_E}| \left(\cos(\Theta_E) \cos(\alpha_E) \cos(\zeta_E) - \sin(\Theta_E) \sin(\alpha_E) \right) \\
V_E &= |\vec{V}_{f_E}| \left[\cos(\Phi_E) \cos(\alpha_E) \sin(\zeta_E) + \sin(\Phi_E) (\sin(\Theta_E) \cos(\alpha_E) \cos(\zeta_E) + \cos(\Theta_E) \sin(\alpha_E)) \right] \\
W_E &= |\vec{V}_{f_E}| \left[-\sin(\Phi_E) \cos(\alpha_E) \sin(\zeta_E) + \cos(\Phi_E) (\sin(\Theta_E) \cos(\alpha_E) \cos(\zeta_E) + \cos(\Theta_E) \sin(\alpha_E)) \right]
\end{aligned} \tag{2.125}$$

où l'angle de poursuite de trajectoire d'équilibre (en anglais *track angle*) ζ_E est calculé par l'intermédiaire de la solution physiquement valide de la relation quadratique :

$$\sin(\chi_E) = -k_{\chi_4} \pm \frac{\sqrt{k_{\chi_4}^2 - k_{\chi_5}}}{2} \tag{2.126}$$

où les coefficients k_{χ_i} $i=1..5$ sont calculés comme :

$$\begin{aligned}
k_{\chi_1} &= \sin(\Phi_E) \sin(\Theta_E) \cos(\alpha_E) & k_{\chi_4} &= \frac{-k_{\chi_2} k_{\chi_3}}{k_{\chi_1}^2 + k_{\chi_2}^2} \\
k_{\chi_2} &= \cos(\Phi_E) \cos(\alpha_E) & k_{\chi_5} &= \frac{k_{\chi_3}^2 - k_{\chi_1}^2}{k_{\chi_1}^2 + k_{\chi_2}^2} \\
k_{\chi_3} &= \sin(\beta_E) - \sin(\Phi_E) \cos(\Theta_E) \sin(\alpha_E)
\end{aligned} \tag{2.127}$$

Les composantes du vecteur de vitesse angulaire sont calculées par :

$$\vec{\omega}_{B/I} = \begin{bmatrix} P_E \\ Q_E \\ R_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_b \\ q_b \\ r_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega_E \sin(\Theta_E) \\ \Omega_E \sin(\Phi_E) \cos(\Theta_E) \\ \Omega_E \cos(\Phi_E) \cos(\Theta_E) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_b \\ q_b \\ r_b \end{bmatrix} \tag{2.128}$$

où les déviations des valeurs d'équilibre sont désignées par des lettres minuscules. Pour compléter les paramètres initiaux, définissons les variables dépendantes α_{wb} β_{wb} et q_w respectivement l'angle d'incidence, l'angle de glissement et la pression dynamique. La vitesse $(\vec{V}_{bi} \cdot \vec{i}_B) \vec{j}_B + (\vec{V}_{bi} \cdot \vec{j}_B) \vec{i}_B$ définit la direction de l'axe $\vec{i}_{y'}$ dans le repère vent

$$(\mathcal{W}) \text{ et } \vec{j}_{\mathcal{W}} \text{ est définie par le produit vectorielle } \vec{j}_{\mathcal{W}} = \left(\frac{\vec{k}_B \times \vec{V}_{bi}}{|\vec{k}_B \times \vec{V}_{bi}|} \right)$$

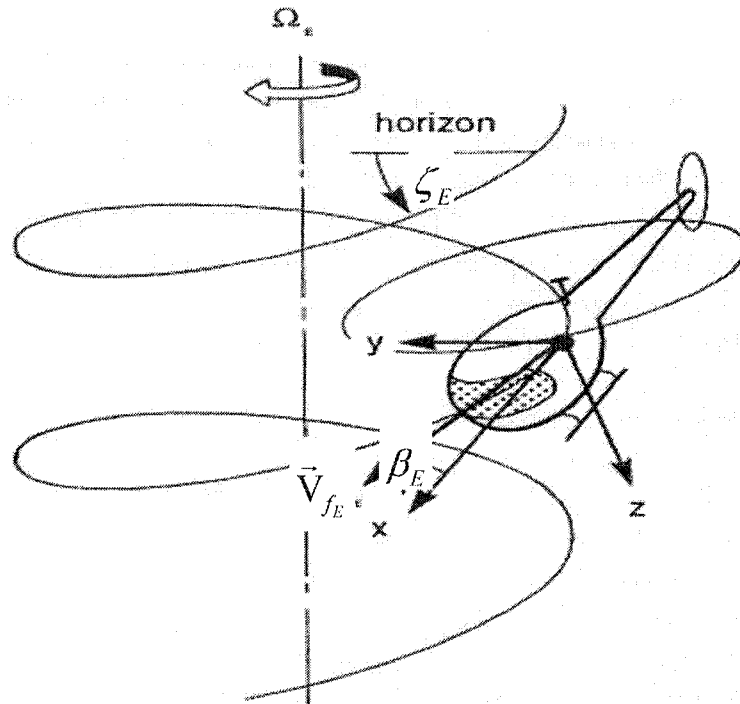


Figure 2.16 Conditions principales de vol d'équilibre [Pad96]

$$\alpha_{wb} = \tan^{-1} \left(\frac{\vec{V}_{bi} \cdot \vec{k}_B}{\vec{V}_{bi} \cdot \vec{i}_B} \right) \quad -\pi \leq \alpha_{wb} \leq \pi$$

$$\beta_{wb} = \tan^{-1} \left(\frac{-\vec{V}_{bi} \cdot \vec{j}_B}{\sqrt{(\vec{V}_{bi} \cdot \vec{i}_B)^2 + (\vec{V}_{bi} \cdot \vec{k}_B)^2}} \right) \quad (2.129)$$

$$q_w = 0,5 \rho (\vec{V}_{bi} \cdot \vec{V}_{bi})$$

La masse spécifique d'air (ρ) au niveau de référence, dans les conditions de température et de pression standard est fixée à 1,225 [kg m⁻³] ou 0,002377 [slugs ft⁻³].

Remarque : Notons que les valeurs des angles de roulis et de tangage en équilibre ne sont pas libres. Elles sont calculées à partir de la résolution simultanée des équations d'équilibre du corps rigide.

Remarque : Pour certains cas de vol acrobatique, les paramètres d'équilibre initiaux sont calculés en fonction du facteur de charge.

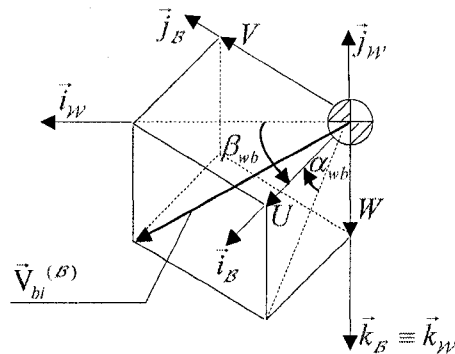


Figure 2.17 Définition de l'angle d'incidence et l'angle de glissade

2.9.1 Les équations d'équilibre d'un corps rigide

Pour un aéronef en équilibre, les forces et les couples aérodynamiques équilibrent les forces et couples inertiels, centrifuges, et gyroscopiques verifient $\sum \vec{F}_E = 0$, $\sum \vec{M}_E = 0$. En réalité, les valeurs acceptables sont de l'ordre de :

$$\sum \Delta \vec{F}_E \leq m_B 10^{-4}, \quad \sum \Delta \vec{M}_E \leq 0,5 I_{zz} 10^{-4}.$$

Le modèle linéaire perturbé (2.132) est développé en premier ordre autour des conditions d'équilibre (2.130) et (2.131). Le modèle est basé sur la supposition que le changement dans les conditions de vol de l'hélicoptère peut être représenté par la superposition de l'ensemble des effets linéaires sur la dynamique du système, provoqué par les changements des variables indépendantes. Dans un système compliqué comme un giravion en vol, la supposition de linéarité est mathématiquement correcte seulement pour de petites perturbations autour des conditions d'équilibre. Les composantes en équilibre portent l'indice E .

$$\left[\begin{array}{l} \frac{X_{M_E} + X_{T_E} + X_{F_E} + X_{H_E} + X_{V_E}}{m_B} = W_E Q_E - V_E R_E + g \sin(\Theta_E) \\ \frac{Y_{M_E} + Y_{T_E} + Y_{F_E} + Y_{V_E}}{m_B} = U_E R_E - P_E W_E - g \cos(\Theta_E) \sin(\Phi_E) \\ \frac{Z_{M_E} + Z_{T_E} + Z_{F_E} + Z_{H_E} + Z_{V_E}}{m_B} = V_E P_E - Q_E U_E - g \cos(\Theta_E) \cos(\Phi_E) \end{array} \right] \quad (2.130)$$

$$\left[\begin{array}{l} J_{ZZ} \left(\sum L_{B_E} + (J_{YY} - J_{ZZ}) Q_E R_E + J_{XZ} P_E Q_E \right) + J_{XZ} \left(\sum N_{B_E} + (J_{XX} - J_{YY}) P_E Q_E - J_{XZ} Q_E R_E \right) = 0 \\ \sum M_{B_E} + (J_{ZZ} - J_{XX}) P_E R_E + J_{XZ} (R_E^2 - P_E^2) = 0 \\ J_{XX} \left(\sum N_{B_E} + (J_{XX} - J_{YY}) P_E Q_E - J_{XZ} Q_E R_E \right) + J_{XZ} \left(\sum L_{B_E} + (J_{YY} - J_{ZZ}) Q_E R_E + J_{XZ} P_E Q_E \right) = 0 \end{array} \right] \quad (2.131)$$

Considérons le modèle non linéaire de la forme (2.119). En évaluant le modèle autour d'un point d'équilibre pour de petites perturbations de type (2.132) :

$$\begin{aligned} \underline{x} &= [\underline{x}_B^T, \underline{x}_R^T, \underline{x}_C^T]^T \\ \underline{x}_B &= \underline{x}_{B_E} + \delta \underline{x}_B = [U_E, V_E, W_E, \Phi_E, \Theta_E, \Psi_E, P_E, Q_E, R_E]^T + [u_b, v_b, w_b, \phi_b, \theta_b, \psi_b, p_b, q_b, r_b]^T \\ \underline{x}_R &= [\tilde{\beta}_E + \tilde{\beta} \quad \dot{\tilde{\beta}}_E + \dot{\tilde{\beta}} \quad \underline{\lambda}_E + \underline{\lambda}]^T; \tilde{\beta} = [a_0 \quad a_{l_w} \quad b_{l_w}]^T; \underline{\lambda} = [\lambda_0 \quad \lambda_s \quad \lambda_c]^T; \\ \underline{x}_C &= [\theta_{0E} + \theta_0 \quad A_{lS_E} + A_{lS} \quad B_{lC_E} + B_{lC} \quad \theta_{0T_E} + \theta_{0T}]^T \end{aligned} \quad (2.132)$$

le modèle linéaire perturbé s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
\dot{u}_b &= \frac{\sum X_{B_E} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i X_B \right)}{\partial \underline{x}_j}}{m_B} + (R_E + r_b)(V_E + v_b) - (Q_E + q_b)(W_E + w_b) - g \sin(\Theta_E + \theta_b) \\
\dot{v}_b &= \frac{\sum Y_{B_E} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i Y_B \right)}{\partial \underline{x}_j}}{m_B} + (P_E + p_b)(W_E + w_b) - (R_E + r_b)(U_E + u_b) + g [\sin(\Theta_E + \theta_b) \cos(\Phi_E + \phi_b)] \\
\dot{w}_b &= \frac{\sum Z_{B_E} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i Z_B \right)}{\partial \underline{x}_j}}{m_B} + (Q_E + q_b)(U_E + u_b) - (P_E + p_b)(V_E + v_b) + g [\cos(\Theta_E + \theta_b) \cos(\Phi_E + \phi_b)] \\
\dot{p}_b &= \frac{J_{ZZ}}{J_{XX}J_{ZZ} - I_{XZ}^2} \left(\sum L_{B_E} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i L_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{YY} - J_{ZZ})(Q_E + q_b)(R_E + r_b) + J_{XZ}(P_E + p_b)(Q_E + q_b) \right) + \\
&+ \frac{J_{XZ}}{J_{XX}J_{ZZ} - J_{XZ}^2} \left(\sum N_{B_E} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i N_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{XX} - J_{YY})(P_E + p_b)(Q_E + q_b) - J_{XZ}(Q_E + q_b)(R_E + r_b) \right) \\
\dot{q}_b &= \frac{1}{J_{YY}} \left(\sum M_{B_E} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i M_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{ZZ} - J_{XX})(P_E + p_b)(R_E + r_b) + J_{XZ}[(R_E + r_b)^2 - (P_E + p_b)^2] \right) \\
\dot{r}_b &= \frac{J_{XX}}{J_{XX}J_{ZZ} - J_{XZ}^2} \left(\sum N_{B_E} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i N_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{XX} - J_{YY})(P_E + p_b)(Q_E + q_b) - J_{XZ}(Q_E + q_b)(R_E + r_b) \right) + \\
&+ \frac{J_{XZ}}{J_{XX}J_{ZZ} - J_{XZ}^2} \left(\sum L_{B_E} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i L_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{YY} - J_{ZZ})(Q_E + q_b)(R_E + r_b) + J_{XZ}(P_E + p_b)(Q_E + q_b) \right)
\end{aligned}
\tag{2.133}$$

En supposant $\cos(\phi_b) \approx 1$; $\sin(\phi_b) \approx \phi_b$; $\cos(\theta_b) \approx 1$; $\sin(\theta_b) \approx \theta_b$; $\cos(\psi_b) \approx 1$; $\sin(\psi_b) \approx \psi_b$, ainsi que le produit de deux (ou plusieurs) variables perturbées soit nul et tenant compte des relations (2.130) et (2.131), nous pouvons réécrire le modèle linéaire perturbé :

$$\begin{aligned}
\dot{u}_b &= \frac{\sum_i X_{i_F} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i X_i \right)}{\partial \underline{x}_j}}{m_B} + R_E v_b + V_E r_b - Q_E w_b - W_E q_b - g \cos(\Theta_E) \theta_b \\
\dot{v}_b &= \frac{\sum_i Y_{i_F} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i Y_i \right)}{\partial \underline{x}_j}}{m_B} + P_E w_b + W_E p_b - R_E u_b - U_E r_b + g [\cos(\Theta_E) \cos(\Phi_E) \theta_b - \sin(\Theta_E) \sin(\Phi_E) \phi_b] \\
\dot{w}_b &= \frac{\sum_i Z_{i_F} + \sum_j \frac{\partial \left(\sum_i Z_i \right)}{\partial \underline{x}_j}}{m_B} + Q_E u_b + U_E q_b - P_E v_b - V_E p_b - g [\sin(\Theta_E) \cos(\Phi_E) \theta_b + \cos(\Theta_E) \sin(\Phi_E) \phi_b] \\
\dot{p}_b &= \frac{J_{ZZ}}{J_{XX} J_{ZZ} - J_{XZ}^2} \left(\sum_j \frac{\partial \left(\sum_i L_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{YY} - J_{ZZ})(Q_E r_b + R_E q_b) + J_{XZ}(P_E q_b + Q_E p_b) \right) + \\
&+ \frac{J_{XZ}}{J_{XX} J_{ZZ} - J_{XZ}^2} \left(\sum_j \frac{\partial \left(\sum_i N_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{XX} - J_{YY})(P_E q_b + Q_E p_b) - J_{XZ}(Q_E r_b + R_E q_b) \right) \\
\dot{q}_b &= \frac{1}{J_{YY}} \left(\sum_j \frac{\partial \left(\sum_i M_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{ZZ} - J_{XX})(P_E r_b + R_E p_b) + 2J_{XZ}(R_E r_b - P_E p_b) \right) \\
\dot{r}_b &= \frac{J_{XX}}{J_{XX} J_{ZZ} - J_{XZ}^2} \left(\sum_j \frac{\partial \left(\sum_i N_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{XX} - J_{YY})(P_E q_b + Q_E p_b) - J_{XZ}(Q_E r_b + R_E q_b) \right) + \\
&+ \frac{J_{XZ}}{J_{XX} J_{ZZ} - J_{XZ}^2} \left(\sum_j \frac{\partial \left(\sum_i L_B \right)}{\partial \underline{x}_j} + (J_{YY} - J_{ZZ})(Q_E r_b + R_E q_b) + J_{XZ}(P_E q_b + Q_E p_b) \right)
\end{aligned} \tag{2.134}$$

qui est une forme particulière du modèle linéaire (2.122), présentant le développement de la première équation seulement.

Nous avons ainsi obtenu le modèle théorique et linéaire d'un hélicoptère en toute condition de vol (2.122), que nous allons appliquer maintenant à un appareil :

l'hélicoptère UH-60A (BlackHawk) de Sikorsky pour le mode de vol au voisinage du vol stationnaire à 60 [pi] d'altitude du niveau de référence.

Pour le vol stationnaire et le vol à basse vitesse avec une référence visuelle, l'ensemble le plus raisonnable des variables de sortie est constitué par le vecteur $\underline{x}_I = [\dot{x}_I, \dot{y}_I, \dot{h}(\dot{h} = -\dot{z}_I), \phi_b, \theta_b, \psi_b, p_b, q_b, r_b]^T$ dans lequel les (δ) devant les variables sont omis pour simplifier l'écriture. Ainsi les vitesses linéaires sont définies dans le repère inertiel de la terre et l'attitude est exprimée sous forme d'angles d'Euler. Comparativement au modèle (2.122), le choix des variables de sortie implique une transformation des paramètres entre le repère "corps" et le repère "inertiel" et nécessite une transformation de la matrice de transfert $G_B(s) \rightarrow G_I(s)$ et de la matrice de transfert $G_{B/P}(s) \rightarrow G_{I/P}(s)$ du repère "corps" dans le repère "inertiel" qui s'écrit dans l'espace d'état sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A_h \underline{x} + \begin{bmatrix} B_{hgust} & B_h \end{bmatrix} \underline{u} ; \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_I^T & \underline{x}_R^T & \underline{x}_C^T \end{bmatrix}^T ; \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{x}_P^T & \underline{u}^T \end{bmatrix}^T \\ \underline{y} = \underline{x}_I &= C_h \underline{x} ; \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} \eta_{coll} & \eta_{lat} & \eta_{long} & \eta_{pedal} \end{bmatrix}^T \\ \tilde{\underline{x}}_I &= [\dot{x}_I, \dot{y}_I, \dot{h}(\dot{h} = -\dot{z}_I), \phi_b, \theta_b, \psi_b, \dot{\phi}_b, \dot{\theta}_b, \dot{\psi}_b]^T \\ \underline{x}_I &= [\dot{x}_I, \dot{y}_I, \dot{h}(\dot{h} = -\dot{z}_I), \phi_b, \theta_b, \psi_b, p_b, q_b, r_b]^T \end{aligned} \quad (2.135)$$

dont les valeurs numériques seront introduites par la suite. Les détails de cette transformation sont donnés par Heffley et al. dans [HJLW79].

Nous considérerons la matrice de sortie complète sur les variables de la cellule exprimés dans le repère inertiel, afin de mettre en correspondance le modèle avec le système réel, mais pour la synthèse du compensateur par la méthode de sensibilité mixte et par la méthode de *loop-shaping* dans le chapitre 3 et le chapitre 4 nous n'effectuerons le retour

que sur les signaux $\begin{bmatrix} \dot{h}, (\dot{y}_i + \phi_b), (\dot{x}_i + \theta_b), r_b, p_b, q_b \end{bmatrix}^T$ ou $\begin{bmatrix} \dot{h}, \phi_b, \theta_b, r_b, p_b, q_b \end{bmatrix}^T$, qui seront introduits par des multiplicateurs matriciels \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 .

D'une part, comparativement aux modèles existants qui sont soit trop simplistes (2.134), soit trop complexes, dont la dynamique du rotor principal est calculée à partir de l'équation générale de la dynamique (2.34), nous avons développé un modèle intermédiaire sous certaines hypothèses, tenant compte de la dynamique de battement et de la dynamique du rotor principal qui nous permettra de faire une analyse et une synthèse de lois de commande dans le chapitre 3 d'une part un peu réaliste. Les principaux objectifs de la loi de commande sont décrits dans le chapitre 1.8. D'autre part, pour réaliser une commande de vol ou un système de stabilité et commande augmenté (SCAS *Stability-and-Control Augmentation System*), l'influence de la dynamique du rotor principal est très importante. Ces approches exigent un système de commande à large bande passante et à pleine autorité qui est l'objectif des chapitres suivants. Après avoir examiné les spécifications de base et les techniques de synthèse de la commande robuste, plus spécialement l'approche H_∞ et la technique de *loop-shaping* dans le chapitre 3 et annexe C, nous présenterons les expérimentations des lois de commande dans le chapitre 4. Les approches utilisées sont basées sur les techniques dans le domaine fréquentielle, permettent de prendre en compte les différentes spécifications et les conflits de structure de la loi de commande et fournissent la robustesse nécessaire aux compensateurs pour être valables dans un domaine de vol suffisamment élargi.

CHAPITRE 3 : LA SYNTHÈSE DE LA COMMANDE ROBUSTE

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons mettre en application la théorie de la synthèse de la commande robuste par l'approche H_∞ , ainsi que la régulation par l'approche linéaire quadratique pour obtenir une loi de commande de vol de l'hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky. La résolution du problème standard de la commande robuste par l'approche H_∞ , ainsi que les principaux algorithmes sont décrits dans l'annexe C. Certaines définitions qui nous seront utiles pour le développement sont données dans l'annexe A. Le calcul des normes H_2 et H_∞ est rappelé dans l'annexe B. Le point de fonctionnement étudié est le voisinage du vol stationnaire à 60 [pi] d'altitude du niveau de référence. Pour obtenir ces résultats sans rentrer dans les détails du développement théorique, nous nous sommes donc volontairement concentrés sur l'adaptation de la théorie pour notre système.

3.2 Formulation du problème standard H_∞

En se référant à la représentation schématique de la figure 3.1, le problème standard H_∞ , appliqué pour l'hélicoptère consiste à minimiser l'effet d'une perturbation, notée, w , sur le comportement du système. Le signal w est supposé à énergie finie et sa taille est mesurée en norme Euclidienne, notée $\| \cdot \|_2$. Son effet sur le système est mesuré par la norme $\| \cdot \|_2$ d'un vecteur "coût", z . Enfin, on peut agir sur le système par une commande, u , en utilisant l'observation, e . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande

$u = K(s)e$, qui minimise l'impact du signal, w , sur le signal "coût", z . On mesure cet impact par le rapport $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$. La stabilité du système bouclé devra bien sûr être assurée.

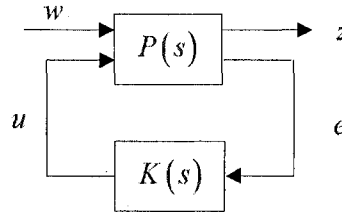


Figure 3.1 Schéma du problème H_∞ standard

Dans ce schéma de boucle fermée, e et u , désignent l'entrée et la sortie respectivement du compensateur $K(s)$. La matrice de transfert $P(s)$ décrit l'interconnexion entre les signaux du vecteur d'entrée $\begin{Bmatrix} w \\ u \end{Bmatrix}$ et du vecteur de sortie $\begin{Bmatrix} z \\ e \end{Bmatrix}$, et inclut la matrice de transfert de l'hélicoptère $G(s)$ et les fonctions de pondérations, qui seront introduites par la suite. De la figure 3.1 on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

La matrice de transfert $P(s)$ est celle du système augmenté et on la supposera propre. Lorsque ce système est rebouclé sur la commande $u = K(s)e$, la matrice de transfert en boucle fermée de w à z , est donnée par la transformation linéaire fractionnelle (LFT) $F_l(P, K)$:

$$\begin{aligned} Z(s) &= F_l(P, K) W(s) \\ F_l(P, K) &= P_{11}(s) + P_{12}(s) K(s) (I - P_{22}(s) K(s))^{-1} P_{21}(s) \end{aligned} \quad (3.2)$$

En observant que le ratio $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ est dans le pire des cas :

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|F_l(P, K)\|_\infty \quad (3.3)$$

le problème standard de la synthèse de la loi de commande par l'approche H_∞ peut se formuler mathématiquement comme suit :

Problème H_∞ optimal : minimiser la norme $\|F_l(P, K)\|_\infty$ sur l'ensemble des compensateurs $K(s)$ qui stabilisent le système de manière interne. Le minimum est noté (γ_{opt}) et est appelé gain (ou atténuation) (H_∞ - optimal). Le problème sous - optimal associé joue également un rôle important.

Problème H_∞ sous - optimal : étant donné $\gamma > 0$, trouver un compensateur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$.

Introduisons les différents objectifs et spécifications pour la synthèse de la loi de commande robuste. C'est l'objet du paragraphe, où nous choisissons de traiter les performances fréquentielles de l'asservissement dans le cadre des valeurs singulières de la fonction de sensibilité et de la fonction de sensibilité complémentaire.

3.3 Objectifs de performance

De manière général, un asservissement est performant s'il réagit rapidement et suit la consigne avec précision (cas d'une boucle de suivi) ou rejette rapidement les perturbations (cas d'une boucle de régulation). Intuitivement, les performances sont d'autant meilleures que le gain de boucle est élevé. Mathématiquement, cette tendance est exprimée dans le cas multivariable par un ensemble de contraintes sur les valeurs

singulières de la fonction de sensibilité, la fonction de sensibilité complémentaire et le transfert en boucle ouverte du système. Ainsi, nous choisissons de présenter le problème H_∞ , sur la boucle de suivi de la figure 3.2, dans laquelle $G(s)$ désigne la matrice de transfert de l'hélicoptère, commandé par un régulateur $C(s)$ dans la boucle, avec la dynamique des détecteurs $Q(s)$ dans la boucle de retour et un pré-compensateur $R(s)$ sur le chemin direct. On désigne par $w_r \in \mathbb{R}^{m_1}$ le signal de référence, $y \in \mathbb{R}^p$ la sortie du système, $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ l'erreur de suivi, $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ la commande issue du correcteur, $w_u \in \mathbb{R}^{m_2}$ la perturbation de la commande, $w_y \in \mathbb{R}^p$ la perturbation sur la sortie, $w_n \in \mathbb{R}^{m_1}$ le bruit de mesure et $Q(s)$ introduit la dynamique des capteurs. Faisons la remarque que les signaux w_u , w_y et w_n sont par nature inconnus. Selon le même principe, cette mise en œuvre peut être appliquée pour tout autre système multivariable, répondant à des objectifs différents.

Selon le schéma de la figure 3.2, après un changement de variable, la transformée de Laplace de l'erreur de suivi s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(s) &= R(s).w_r(s) - w_n(s) - Q(s).[w_y(s) + G(s).w_u(s) + G(s).C(s).\varepsilon(s)] \\
 \underbrace{Q^{-1}(s).\varepsilon(s)}_{e(s)} &= \underbrace{Q^{-1}(s).R(s).w_r(s)}_{\tilde{R}(s)} - Q^{-1}(s).w_n(s) - \\
 &\quad - \left[w_y(s) + G(s).w_u(s) + G(s).C(s).\underbrace{Q(s)}_{K(s)}.\underbrace{Q^{-1}(s).\varepsilon(s)}_{e(s)} \right] \\
 e(s) &= [I_p + G(s).K(s)]^{-1} . [\tilde{R}(s).w_r(s) - Q^{-1}(s).w_n(s) - w_y(s) - G(s).w_u(s)]
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

De manière similaire, la transformée de Laplace de la sortie $y(s)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
y(s) &= G(s) \cdot \left[w_u(s) + \underbrace{C(s)}_{K(s)} \cdot \underbrace{Q^{-1}(s)}_{e(s)} \cdot \varepsilon(s) \right] + w_y(s) = \\
&= G(s) \cdot [w_u(s) + K(s) \cdot \varepsilon(s)] + w_y(s) \\
y(s) &= G(s) \cdot K(s) \cdot [I_{p \times p} + G(s) \cdot K(s)]^{-1} \cdot [\tilde{R}(s) \cdot w_r(s) - Q^{-1}(s) \cdot w_n(s)] + \\
&+ \left\{ \underbrace{I_p - G(s) \cdot K(s) \cdot [I_{p \times p} + G(s) \cdot K(s)]^{-1}}_{[I_p + G(s) \cdot K(s)]^{-1}} \right\} \cdot [G(s) \cdot w_u(s) + w_y(s)]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

En notant la fonction de sensibilité à la sortie par $S_O(s) = [I_p + G(s)K(s)]^{-1}$ et la fonction de sensibilité complémentaire à la sortie par $T_O(s) = G(s)K(s)[I_p + G(s)K(s)]^{-1}$, ces deux matrices sont reliées par la relation suivante :

$$\underbrace{G(s)K(s)[I_p + G(s)K(s)]^{-1}}_{T_O(s)} + \underbrace{[I_p + G(s)K(s)]^{-1}}_{S_O(s)} = I_p \tag{3.6}$$

La plupart des spécifications fréquentielles peuvent s'exprimer par des contraintes sur $S_O(s)$ et $T_O(s)$ et de façons équivalentes sur le profil de la plus petite et la plus grande valeur singulière de la fonction de transfert en boucle ouverte $L_O(s) = G(s)K(s)$ du système.

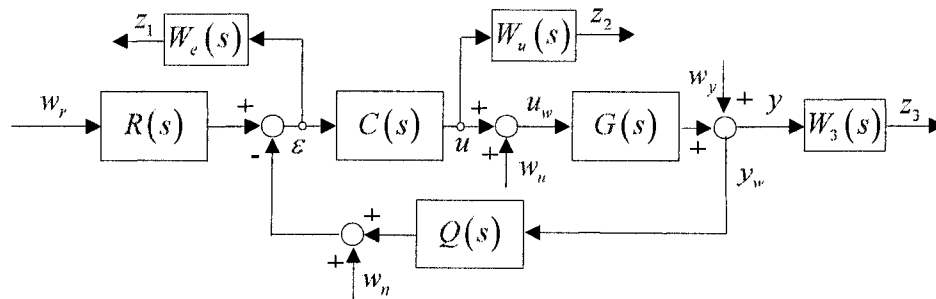


Figure 3.2 Structure de la boucle de régulation

3.3.1 Rejet des perturbations sur la sortie

L'influence des perturbations sur la sortie est exprimée mathématiquement par la fonction de sensibilité à la sortie (3.7) :

$$\frac{y(s)}{w_y(s)} = \underbrace{\left[I_p + G(s)K(s) \right]^{-1}}_{S_o(s)} \quad (3.7)$$

et la spécification de rejet des perturbations sur la sortie demande une faible influence de $w_y(s)$ sur $y(s)$. Autrement dit, on souhaite que $\bar{\sigma}(S_o(s))$ soit aussi "faible" que possible. Nous pouvons aussi écrire [Mac89] :

$$\bar{\sigma}(S_o(s)) = \frac{1}{\underline{\sigma}([I_p + G(s)K(s)])} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}\left(\underbrace{G(s)K(s)}_{L_o(s)}\right) - 1} \quad (3.8)$$

Plus précisément, le problème standard (sans pondération) de rejet des perturbations sur la sortie se traduit sous forme d'une inégalité sur la norme :

$$\bar{\sigma}(S_o(j\omega)) < \gamma ; \forall 0 < \omega < \omega_1 \quad (3.9)$$

En supposant que $\underline{\sigma}(L_o(s)) \gg 1$ nous en déduisons l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(S_o(s)) &\approx \frac{1}{\underline{\sigma}(L_o(s))} \\ \underline{\sigma}(L_o(s)) &= \underline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) > \frac{1}{\gamma} ; \forall 0 < \omega < \omega_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comme cette perturbation prend son sens aux basses fréquences, on voit que l'objectif de cette performance est d'autant plus atteint que le gain de la boucle est grand dans le domaine fréquentiel et que la plus petite valeur singulière du transfert en boucle ouverte $L_o(s) = G(s)K(s)$ du système soit grande dans la bande passante. En introduisant une

fonction de transfert $W_e(s)$, jouant le rôle de pondération (en anglais *weighting function*) de type passe - bas sur la fonction de la sensibilité sur la sortie, la première contrainte sur la synthèse de la commande robuste est introduite par l'inégalité suivante:

$$\|S_O(j\omega)\|_\infty \leq \frac{\gamma}{|W_e(j\omega)|} \quad \forall 0 < \omega < \omega_1 \text{ soit } \|W_e(j\omega)S_O(j\omega)\|_\infty < \gamma \quad \forall 0 < \omega < \omega_1 \quad (3.11)$$

3.3.2 Rejet des bruits de mesure

L'influence des bruits de mesure sur la sortie est exprimée mathématiquement par la relation (3.12) :

$$\frac{y(s)}{w_n(s)} = - \underbrace{G(s)K(s)[I_p + G(s)K(s)]^{-1}}_{T_O(s)} Q^{-1}(s) = T_O(s)Q^{-1}(s) \quad (3.12)$$

Étant donné que la dynamique des détecteurs $Q(s)$ est définie à l'avance, pour réduire l'ampleur des effets du bruit de mesure par l'asservissement, il est nécessaire que la sensibilité complémentaire de sortie soit la plus "faible" possible. De manière équivalente :

$$\bar{\sigma}(T_O(s)) = \bar{\sigma}(I_p + S_O(s)) = \bar{\sigma}\left(\left[I_p + L_O^{-1}(s)\right]^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I_p + L_O^{-1}(s))} \quad (3.13)$$

nous désirons donc que $\underline{\sigma}(I_p + L_O^{-1}(s))$ soit plus grand possible, ce qui exige, que $\underline{\sigma}(L_O^{-1}(s))$ soit aussi le plus grand possible ou bien que $\bar{\sigma}(L_O(s))$ soit le plus petit possible. Comme les bruits de mesure se manifestent généralement dans le domaine des hautes fréquences, la norme H_∞ du transfert en boucle ouverte $L_O(s) = G(s)K(s)$ du système doit être petite ou $\bar{\sigma}(L_O(s)) \ll 1$ et selon l'expression (3.13) on a :

$$\bar{\sigma}(T_O(s)) = \bar{\sigma}(L_O(s)) = \bar{\sigma}(G(s)K(s)) < \gamma ; \quad \forall \omega_2 < \omega < \infty \quad (3.14)$$

En exprimant notre intérêt dans le domaine des hautes fréquences, introduisons une fonction de transfert $W_3(s)$, jouant le rôle de pondération de type passe - haut sur la fonction de la sensibilité complémentaire sur la sortie :

$$\|T_o(j\omega)\|_\infty < \frac{\gamma}{|W_3(j\omega)|}; \quad \forall \omega > \omega_2 \text{ soit } \|W_3(j\omega)T_o(j\omega)\|_\infty < \gamma; \quad \forall \omega > \omega_2 \quad (3.15)$$

Selon les deux premières contraintes, le problème H_∞ standard consisterait à trouver un paramètre (γ) et un compensateur $K(s)$, tels que

$$\left\| \begin{matrix} S_o(j\omega) \\ T_o(j\omega) \end{matrix} \right\|_\infty < \gamma; \quad \|S_o(j\omega) + T_o(j\omega)\|_\infty < \gamma \quad (3.16)$$

Pondéré, le problème est contraint par l'inégalité (3.17) :

$$\left\| \begin{matrix} W_e(j\omega)S_o(j\omega) \\ W_3(j\omega)T_o(j\omega) \end{matrix} \right\|_\infty < \gamma; \quad \|W_e(j\omega)S_o(j\omega) + W_3(j\omega)T_o(j\omega)\|_\infty < \gamma \quad (3.17)$$

3.3.3 Poursuite du signal de référence

La relation entre le signal de référence et la sortie est exprimée mathématiquement par la relation (3.18) :

$$\frac{y(s)}{w_r(s)} = \underbrace{G(s)K(s)[I_p + G(s)K(s)]^{-1}}_{T_o(s)} \underbrace{Q^{-1}(s)R(s)}_{\tilde{R}(s)} \quad (3.18)$$

La poursuite idéale de la référence implique que le nombre conditionnel $\kappa(T_o(s)\tilde{R}(s)) \approx 1$ soit proche de un et mette en valeur le rôle du pré-compensateur $\tilde{R}(s) = Q^{-1}(s)R(s)$.

3.3.4 Limitation de l'énergie de la commande

L'énergie de la commande sera réduite si la norme de la matrice $K(s)[I_p + G(s)K(s)]^{-1}$ est "faible". En appliquant l'inégalité triangulaire [Mac89] :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(T_o(s)) &> \bar{\sigma}(G(s)) \bar{\sigma}(K(s)[I_p + G(s)K(s)]^{-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\sigma}(K(s)[I_p + G(s)K(s)]^{-1}) &< \frac{\bar{\sigma}(T_o(s))}{\bar{\sigma}(G(s))} \end{aligned} \quad (3.19)$$

on peut remarquer que l'énergie de la commande sera d'autant plus petite que $\bar{\sigma}(T_o(s))$ sera "faible", sauf pour les fréquences où la norme de la sensibilité complémentaire de sortie $\bar{\sigma}(T_o(s))$ est elle-même élevée. Pour cela on introduit une fonction de pondération $W_2(s)$ de type passe-haut ou passe-bande telle que :

$$\begin{aligned} \|K(j\omega)S_o(j\omega)\|_{\infty} &< \frac{\gamma}{|W_u(j\omega)|}; \quad \forall \omega > \omega_2 \text{ soit} \\ \|W_u(j\omega)K(j\omega)S_o(j\omega)\|_{\infty} &< \gamma; \quad \forall \omega > \omega_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donc, une diminution de la norme de la fonction de la sensibilité complémentaire à la sortie $|T_o(j\omega)|$ aux fréquences élevées répond à un double objectif. D'une part, l'effet des bruits de mesure sur la sortie $y(s)$ est atténué. D'autre part, pour éviter des agitations excessives de la commande $u(s)$ et donc la fatigue des actionneurs, dans les domaines fréquentiels où la norme du système n'est pas élevé, il importe de réduire la norme de la fonction de la sensibilité complémentaire à la sortie $|T_o(j\omega)|$. Cela peut aussi passer par une réduction de la norme du compensateur $\bar{\sigma}(K(j\omega))$ ou plus généralement de $\bar{\sigma}(K(j\omega)S_o(j\omega))$.

3.4 Synthèse du compensateur H_∞ par la méthode de sensibilité mixte

Dans cette section nous allons appliquer la théorie de la synthèse H_∞ du compensateur central par la méthode de la sensibilité mixte. La structure de la boucle de commande est présentée à la figure 3.3. Cette dernière peut être vue comme une boucle de poursuite, avec sorties additionnelles (la vitesse de roulis et la vitesse de tangage) et (deux) entrées fictives. Soit $\begin{bmatrix} \dot{h}, (\dot{y}_i + \phi_b), (\dot{x}_i + \theta_b), r_b, p_b, q_b \end{bmatrix}^T$ la sortie du modèle d'hélicoptère $G_l(s)$, $w_r = \begin{bmatrix} \eta_{coll}, \eta_{lat}, \eta_{long}, \eta_{pedal}, 0, 0 \end{bmatrix}^T$ l'entrée du pilote, alors $z_1 = \begin{bmatrix} e_{\dot{h}}, e_{\dot{y}_i + \phi_b}, e_{\dot{x}_i + \theta_b}, e_{r_b}, e_{p_b}, e_{q_b} \end{bmatrix}^T$ et $z_2 = \begin{bmatrix} e_{coll}, e_{lat}, e_{long}, e_{pedal} \end{bmatrix}^T$. La matrice de pondération sur l'erreur $W_{e_{mix}}(s)$ et la matrice de pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$ sont introduites selon les objectifs de performance dans le domaine fréquentiel. Dans le cas multivariable, $W_e(s)$ et $W_u(s)$ sont généralement des matrices diagonales, mais peuvent être des matrices plus ou moins pleines, de manière à privilégier certaines directions et donc à "façonner" plus précisément les valeurs singulières de la fonction de sensibilité et de la fonction de la sensibilité complémentaire. La matrice de pondération constante W_{ad} est un paramètre de design, généralement diagonale, qui nous permet, lors du processus d'optimisation, de privilégier certains signaux de référence.

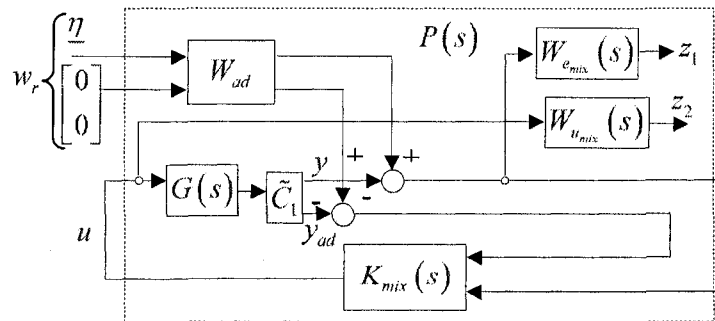


Figure 3.3 Structure de la boucle de poursuite pour le problème de sensibilité mixte avec sorties et entrées additionnelles

Le problème d'optimisation est de trouver un compensateur dynamique $K_{mix}(s)$ qui minimise la fonction coût (3.21) :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_{e_{mix}}(j\omega) S_O(j\omega) W_{ad} \\ W_{u_{mix}}(j\omega) K_{mix}(j\omega) S_O(j\omega) W_{ad} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma ; \quad \forall \omega \quad (3.21)$$

La mise en forme du problème H_{∞} , la formulation du système augmenté est donné dans l'annexe C, section C.3. Le système augmenté est calculé comme (3.22):

$$P(s) = \left\| \begin{bmatrix} W_{e_{mix}}(s) W_{ad} \\ 0_{m_2 \times m_1} \\ W_{ad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_{e_{mix}}(s) G(s) \\ W_2(s) \\ -G(s) \end{bmatrix} \right\| \quad (3.22)$$

Étudions maintenant plus en détail le choix des pondérations que nous allons utiliser lors de la synthèse du compensateur H_{∞} par la méthode de la sensibilité mixte.

3.4.1 Pondération sur l'erreur (et sur la performance) $W_{e_{mix}}(s)$

Pour le rejet des perturbations sur la sortie, la fonction de sensibilité de sortie doit être petite en basse fréquence. Ceci implique le besoin de "forcer" l'action intégral du compensateur en utilisant des blocs $\left(\frac{1}{s}\right)$ dans la fonction de pondération $W_{e_{mix}}(s)$.

Notons qu'un pur intégrateur $\left(\frac{1}{s}\right)$ ne peut pas être utilisé dans une fonction de pondération, parce que le problème standard H_{∞} ne sera pas correctement défini et le système augmenté correspondant ne pourra pas être stabilisé par un compensateur central [BP02].

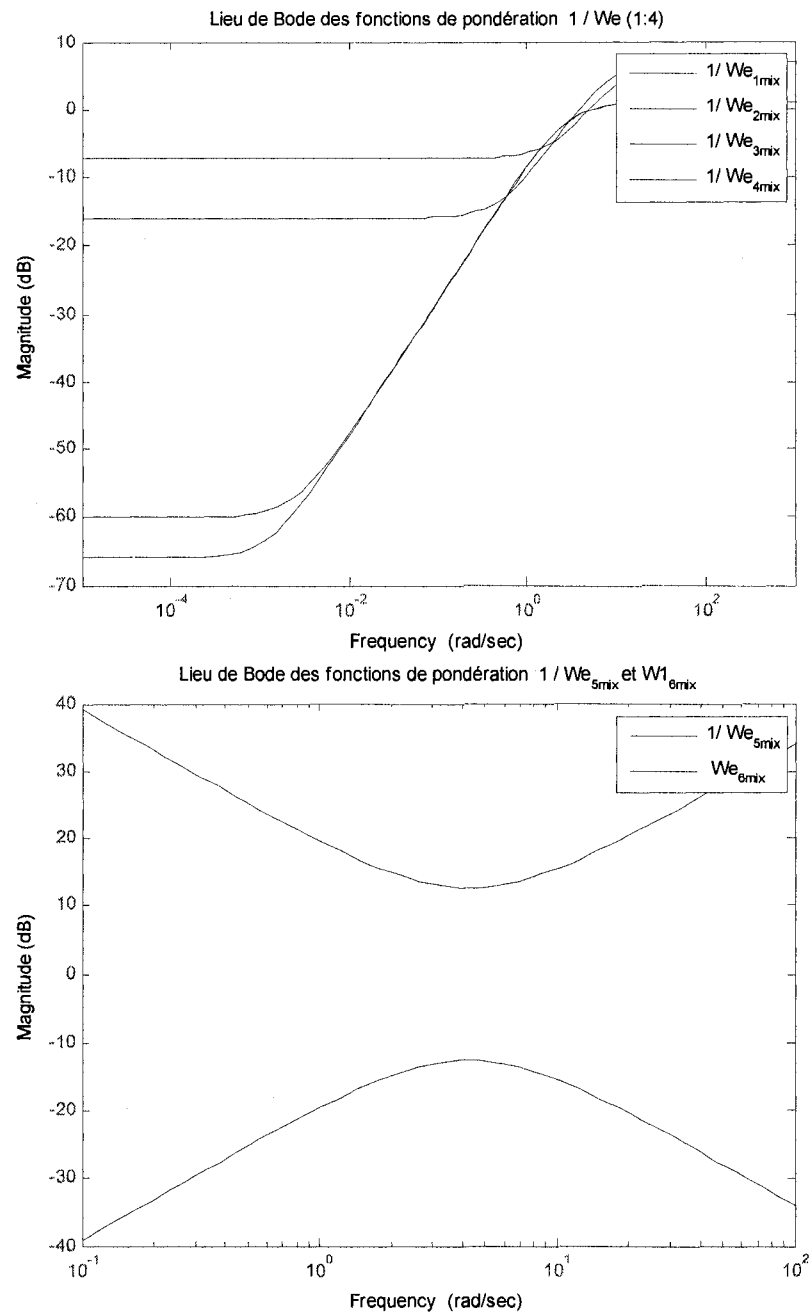


Figure 3.4 Lieu de Bode pour les fonctions de pondération $\text{inv}(W_{e_{i_{mix}}}(s))$

Comme l'erreur en régime établi ne doit pas nécessairement être zéro, les éléments de la

fonction de pondération $W_{e_{mix}}(s)$ ont la forme $W_{e_{mix}}(s) = \frac{s}{s + \omega_b} + \omega_b$. Le choix initial des

fonctions de pondération est discuté brièvement dans l'annexe C, section C.4. En ajustant les paramètres $(M_{W_{ii}}, A_{W_{ii}})$, nous avons voulu que la bande passante soit inférieure à la pulsation naturelle de la dynamique de traînée 12 [rad/s] , pour ne pas coupler la dynamique du compensateur avec la dynamique de traînée du rotor principal non modelée. Avec quatre entrées de commande, nous pouvons commander indépendamment quatre sorties. Pour les deux sorties additionnelles (les vitesses de roulis et de tangage), nous avons choisi d'augmenter les propriétés de rejet de perturbations dans la plage des fréquences $(4-7) \text{ [rad/s]}$. Le lieu de Bode de l'inverse des fonctions de pondération $W_{e_{mix}}(s)$ est présenté à la figure 3.4.

3.4.2 Pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$

La fonction de pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$ est également matricielle et a pour objectif de minimiser l'influence des dynamiques négligées en hautes fréquences. La fréquence de coupure de ces pondérations est très importante puisqu'elle fixe la bande passante des asservissements. Respectant la dynamique non modelée de traînée, la fréquence de 12 [rad/s] est fixée comme la limite supérieure et la limite inférieure est fixée à -100 [dB] pour s'assurer que la pondération $W_{u_{mix}}(s)$ sera dominée par $W_{e_{mix}}(s)$ en basses fréquences. Cette réflexion découle de la fonction coût (3.21) et reflète les objectifs de performance. L'allure fréquentielle de la matrice de pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$ est visualisée à la figure 3.5.

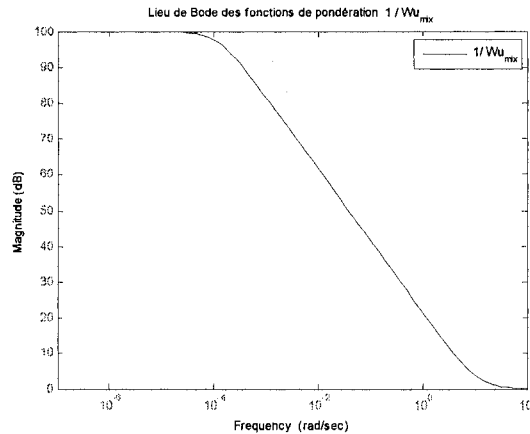


Figure 3.5 Lieu de Bode pour les fonctions de pondération $W_{u_{mix}}(s)$

3.4.3 Matrice de pondération constante W_{ad}

La matrice de pondération constante W_{ad} est appliquée aux signaux de référence et doit pondérer les entrées fictives avec petites valeurs. Pour ces derniers, nous avons choisi le poids (0,05), qui contribue à un certain rejet de perturbations sur les sorties additionnelles sans toutefois influencer de manière significative le système augmenté. Étant donnée un paramètre de design, la matrice de pondération constante W_{ad} doit privilégier de manière relativement égale les principaux signaux de référence.

3.5 Synthèse d'un compensateur H_∞ par la méthode de sensibilité mixte pour rejet des perturbations atmosphériques

Afin d'illustrer le rejet des perturbations atmosphériques nous avons conçu un compensateur H_∞ par la méthode de la sensibilité mixte incluant explicitement l'effet des perturbations, w , d'énergie finie, sur les vitesses linéaires de l'hélicoptère. Le système perturbé est décrit par les équations différentielles matricielles (3.23).

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}_h \underline{x} + \underline{B}_{hgust} \underline{x}_p + \underline{B}_h \underline{u} & \underline{x} \in \mathbb{R}^n & \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^m \\ \tilde{y} &= \tilde{C}_1 \underline{C}_h \underline{x} & \underline{x}_p \in \mathbb{R}^l & \quad \tilde{y} \in \mathbb{R}^p\end{aligned}\quad (3.23)$$

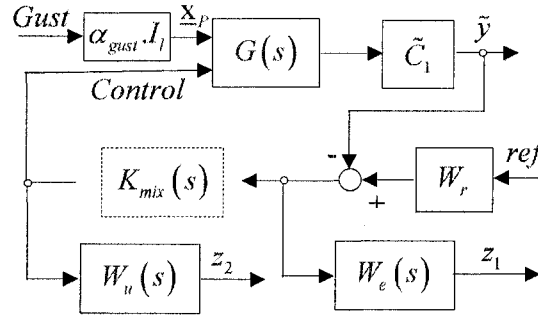


Figure 3.6 Structure du système en boucle ouverte pour le problème de la sensibilité mixte avec perturbations atmosphériques

La structure du système est présentée à la [figure 3.6](#), dont les notations *Gust* et *ref* sont mises en relation avec script donné dans l'annexe D et introduisent respectivement les refales et les consignes, d'énergie finie.

Le système augmenté est calculé comme :

$$P(s) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} W_e(s)W_r \\ 0_{m_2 \times m_1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -W_e(s)G_{gust}(s) \\ 0_{m_2 \times l} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -W_e(s)G(s) \\ W_u(s) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} W_r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G_{gust}(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G(s) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Le problème d'optimisation est de trouver un compensateur dynamique $K_{mix}(s)$ qui minimise la fonction coût (3.25) qui est la fonction de transfert entre $\begin{bmatrix} ref \\ Gust \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_e(j\omega)S_O(j\omega)W_r & \alpha_{gust}W_e(j\omega)S_{gO}(j\omega) \\ W_u(j\omega)K_{mix}(j\omega)S_O(j\omega)W_r & \alpha_{gust}W_u(j\omega)K_{mix}(j\omega)S_{gO}(j\omega) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma ; \quad \forall \omega \quad (3.25)$$

avec $S_{gO}(s) = [I_p + G_{gust}(s)K(s)]^{-1}$ et $G_{gust}(s) = \tilde{C}_1 C_h (sI_n - A_h)^{-1} B_{hgust} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_h & B_{hgust} \\ \tilde{C}_1 C_h & 0_{p \times q} \end{bmatrix}$.

C'est un problème standard qui peut être résolu par des algorithmes développés et disponibles dans la boîte à outil ROBUST CONTROL TOOLBOX de MATLAB.

Notons que le problème est similaire au précédent et les mêmes fonctions de pondérations seront utilisées $W_e(s) = W_{e_{mix}}(s)$, $W_u(s) = W_{u_{mix}}(s)$. Cependant nous avons un paramètre de design supplémentaire (α_{gust}) , qui doit être ajusté par itérations, afin de calculer une marge de robustesse (γ^*) satisfaisante.

3.5.1 «Faiblesse» du compensateur central

Il est intéressant de noter que le compensateur central place des zéros là où le système nominal possède un mode stable dans sa fonction de transfert [ACAGF99]. Un tel comportement peut être indésirable en présence de modes faiblement amortis ou non observables en boucle fermée, dont une variation des paramètres ou une excitation au voisinage de la fréquence du mode peut entraîner une oscillation excessive et même une instabilité.

En présence de perturbation $\Delta(s) \in \mathbb{RH}_\infty$, la procédure de (γ) -itération du problème H_∞ [ZDG96] trouve la plus grande valeur singulière du système en boucle fermée. Cependant, la nécessité que la perturbation soit stable peut être contournée par une factorisation en éléments premiers. Afin d'illustrer la stabilisation robuste en présence d'incertitudes inconnues et bornées en normes, nous avons conçu un compensateur H_∞ par la méthode de "loop-shaping" et la factorisation en éléments premiers à gauche.

3.6 Synthèse du compensateur H_∞ par la méthode de "loop-shaping" et factorisation en éléments premiers

La synthèse de la commande robuste par la méthode de "loop-shaping" [McFG92] est généralement composée de trois étapes. En premier, la boucle ouverte du système est augmentée par un ensemble de fonctions de pondération ($W_{1LS}(s)$ et $W_{2LS}(s)$) selon les objectifs fréquentielles du système en boucle fermée. Le système pondéré classique est présenté à la figure 3.7. La fonction $W_{2LS}(s)$ contient des filtres passe-bas pour but de rejeter les perturbations ou est une matrice scalaire diagonale qui favorise certaines variables par rapport à d'autres. La fonction $W_{1LS}(s)$ contient des éléments d'action proportionnelle et intégrale, afin d'augmenter le gain de boucle en basse fréquence et d'assurer un taux de décroissance des valeurs singulières du système pondéré en boucle ouverte, au voisinage de la fréquence de coupure, inférieure à $-40(\text{dB})$. Une matrice de pondération constante (k_{LS}) est utilisée afin d'ajuster les signaux de commande. Notons que le système est supposé normalisé c'est-à-dire que la réponse à un échelon unitaire respecte les limites physiques du système réel. Le choix des facteurs de normalisation demande une certaine expérience ou réflexion sur ce qui semble physiquement possible pour le système en question, l'hélicoptère dans notre cas.

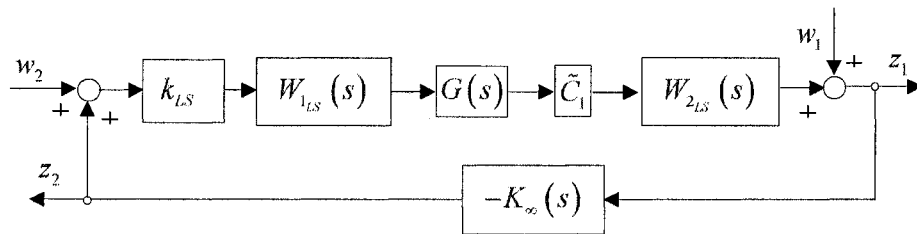


Figure 3.7 Structure de la boucle de régulation pour le problème de la commande robuste par la méthode de "loop-shaping"

Yue et Postlethwaite [YP90] appliquent pour un modèle expérimental d'hélicoptère les facteurs de normalisation suivants :

$$\begin{aligned} \dot{h}_{\max} &= 10 [\text{pi s}^{-1}] & \dot{\Psi}_{\dot{h}_{\max}} &= 0,5 [\text{rad s}^{-1}] \\ p_{\max} &= 0,5 [\text{rad s}^{-1}] & \Theta_{\dot{h}_{\max}} &= 0,2 [\text{rad}] \\ q_{\max} &= 0,2 [\text{rad s}^{-1}] & \Phi_{\dot{h}_{\max}} &= 0,2 [\text{rad}] \end{aligned}$$

Basé sur le même principe de réflexion sur ce qui semble physiquement possible, nous utiliserons les mêmes facteurs de normalisation dans cette recherche. Pour la valeur de \dot{h}_{\max} , ce choix devient autant plausible lorsqu'on la compare avec la vitesse des ascenseurs et le principe du confort des passagers.

La deuxième étape de la synthèse de la commande robuste par la méthode de "*loop-shaping*" consiste à stabiliser de manière robuste le système pondéré via une factorisation en éléments premiers et procédant à une H_{∞} optimisation. Pour le système pondéré :

$$G_p(s) = W_{2/s}(s) G(s) W_{1/s}(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

une factorisation en éléments premiers est donnée par (A.16) (voir annexe A). Le système incertain s'écrit :

$$\Delta G_p(s) = [M_{p_i}(s) + \Delta M_{p_i}(s)]^{-1} [N_{p_i}(s) + \Delta N_{p_i}(s)]; \quad \|\Delta N_{p_i}(s) \quad \Delta M_{p_i}(s)\|_{\infty} < \varepsilon \quad (3.27)$$

où $\Delta M_{p_i}(s)$ et $\Delta N_{p_i}(s)$ sont des matrices de transfert stables (figure 3.8), qui introduisent les incertitudes (a priori inconnues) dans le modèle nominal $G_p(s)$. Pour une telle structure, McFarlane et Glover [McFG92] montrent que le problème H_{∞} se pose comme :

$$\gamma_{\min} = \inf_{K_{\infty} \in \mathbb{R}H_{\infty}} \left\| \begin{bmatrix} K_{\infty} \\ I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} \end{bmatrix} \left(I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} - G_P K_{\infty} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} & G_P \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (3.28)$$

qui est la norme H_{∞} de la matrice de transfert du vecteur $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ vers $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

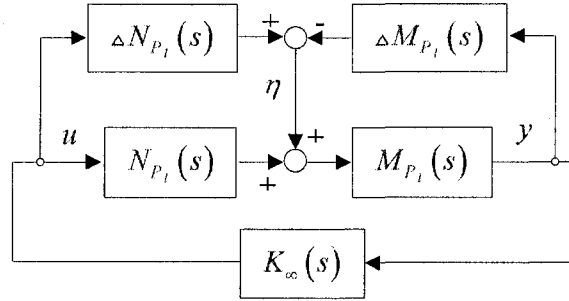


Figure 3.8 Structure du modèle incertain avec factorisation en éléments premiers

et s'écrit aussi comme :

$$\begin{aligned} \gamma_{\min} &= \inf_{K_{\infty} \in \mathbb{R}H_{\infty}} \left\| \begin{bmatrix} K_{\infty} \\ I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} \end{bmatrix} \left(I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} - G_P K_{\infty} \right)^{-1} M_P^{-1} \right\|_{\infty} = \\ &= \inf_{K_{\infty} \in \mathbb{R}H_{\infty}} \left\| \begin{bmatrix} G_P \\ I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} \end{bmatrix} \left(I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} - K_{\infty} G_P \right)^{-1} \begin{bmatrix} K_{\infty} & I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Notons que (γ_{\min}) est la norme H_{∞} de la matrice de transfert du signal (η) vers $\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$ et

que $\left(I_{(n_G + n_{w_{1LS}} + n_{w_{2LS}})} - G_P K_{\infty} \right)^{-1}$ est la fonction de sensibilité pour une boucle de retour

positive. La valeur réciproque de la norme H_{∞} correspond à la marge de stabilité (ε) ,

donnée par McFarlane et Glover [McFG92] :

$$\gamma_{\min} = \frac{1}{\varepsilon_{\max}} = \left\{ 1 - \left\| \begin{bmatrix} N_P & M_P \end{bmatrix} \right\|_H^2 \right\} = \sqrt{1 + \rho(X_I Z_I)} \quad (3.30)$$

où $\| \cdot \|_H$ est la norme de Henkel (la plus grande valeur propre du produit du grammien de commandabilité et du grammien d'observabilité), $\rho(\cdot)$ est le rayon spectral, (X_l) et (Z_l) sont la solution de l'équation algébrique de Riccati (3.31) et (A.17) respectivement

$$\begin{aligned} & \left(\underbrace{A_p - B_p S_l^{-1} D_p^T C_p}_{A_l} \right)^T X_l + X_l \left(\underbrace{A_p - B_p S_l^{-1} D_p^T C_p}_{A_l} \right) - \\ & - \underbrace{X B_p S_l^{-1} B_p^T X + C_p^T R_l^{-1} C_p}_{Q_l} = 0_{(n_G + n_{W_{1LS}} + n_{W_{2LS}}) \times (n_G + n_{W_{1LS}} + n_{W_{2LS}})} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pour $(\gamma_{\min} < 4)$, qui selon le théorème du petit gain permet (25%) de variations d'incertitudes admissibles, la théorie montre que le compensateur ne change pas significativement les modes du système pondéré en boucle ouverte [McFG92]. Si $(\gamma_{\min} > 4)$ ceci indique que le choix des fonctions de pondérations n'est pas compatible avec la stabilité robuste, c'est-à-dire qu'on privilégie la performance par rapport à la robustesse.

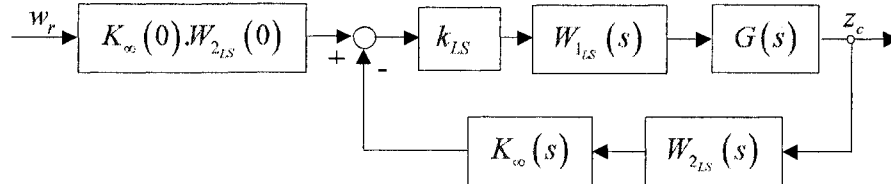


Figure 3.9 Structure de la boucle de régulation pour le problème de la commande robuste par la méthode de "loop-shaping" avec pré-compensateur

La troisième étape consiste à introduire un pré-compensateur $K_\infty(0)W_{2LS}(0)$. Le schéma correspondant est présenté à la figure 3.9. Le rôle du pré-compensateur est d'assurer une erreur nulle en régime établi, supposant que $W_{1LS}(s)$ introduit une action intégrale. Notons que le compensateur $K_\infty(s)$ est dynamique d'ordre égal à l'ordre du système pondéré.

3.6.1 Avantages de la méthode du "loop-shaping"

Les principaux avantages de la méthode de "loop-shaping" sont :

- La synthèse du compensateur n'applique pas la procédure de γ -itérations, utilisée généralement pour la solution du problème standard de H_∞ .
- La méthode fournit une marge de stabilité pour un système avec incertitudes instables et variations paramétriques des modes faiblement amortis [BP02].
- Le compensateur $K_\infty(s)$ ne simplifie pas les pôles stables du système pondéré comme le compensateur central du problème standard et mixte de H_∞ . L'inconvénient résultant se manifeste pour les systèmes dynamiques, dont la bande passante en boucle fermée est relativement proche aux fréquences naturelles des modes simplifiés. Étant donné que la simplification se fait pour les fonctions de transfert entre certaines entrées externes et les sorties contrôlées, ces modes sont pourtant présents dans les autres fonctions de transfert. Intuitivement, l'incertitude peut déplacer de manière significative les places des pôles faiblement amortis et contrarier les performances robustes.
- Les principaux conflits de structure pour le problème de la sensibilité mixte, autour de la fréquence de coupure, sont plus facilement gérés par la méthode de "loop-shaping", qui pondérant la fonction de transfert de boucle ($L = G_p K_\infty$) façonne simultanément les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire.
- Fournit un compromis entre la robustesse et performance. En particulier, selon le Théorème 5.4 de [McFG92] :

$$\bar{\sigma}\left((I - G_p K_\infty)^{-1}\right) = \bar{\sigma}(S_O) \leq \frac{1}{\varepsilon_{\max}} \bar{\sigma}(M_s) \kappa(W_{2_{LS}}) \quad (3.32)$$

$$\bar{\sigma}\left((I - K_\infty G_p)^{-1}\right) = \bar{\sigma}(S_I) \leq \frac{1}{\varepsilon_{\max}} \bar{\sigma}(M_s) \kappa(W_{1_{LS}}) \quad (3.33)$$

$$\bar{\sigma}\left(G_p K_\infty (I - G_p K_\infty)^{-1}\right) = \bar{\sigma}(T_O) \leq \frac{1}{\varepsilon_{\max}} \bar{\sigma}(N_s) \kappa(W_{2LS}) \quad (3.34)$$

$$\bar{\sigma}\left(K_\infty G_p (I - K_\infty G_p)^{-1}\right) = \bar{\sigma}(T_I) \leq \frac{1}{\varepsilon_{\max}} \bar{\sigma}(N_s) \kappa(W_{1LS}) \quad (3.35)$$

$$\bar{\sigma}\left(K_\infty (I - G_p K_\infty)^{-1}\right) = \bar{\sigma}(K_\infty S_O) \leq \frac{1}{\varepsilon_{\max}} \bar{\sigma}(M_s) \kappa(W_{1LS}) \kappa(W_{2LS}) \quad (3.36)$$

où
$$\bar{\sigma}(N_s) = \frac{\bar{\sigma}^2(W_{2LS} G W_{1LS})}{\sqrt{1 + \bar{\sigma}^2(W_{2LS} G W_{1LS})}} \leq 1, \quad \bar{\sigma}(M_s) = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1 + \bar{\sigma}^2(W_{2LS} G W_{1LS})}} \leq 1,$$

$$\kappa(W_{1LS}) = \frac{\bar{\sigma}(W_{1LS})}{\underline{\sigma}(W_{1LS})} \text{ et } \kappa(W_{2LS}) = \frac{\bar{\sigma}(W_{2LS})}{\underline{\sigma}(W_{2LS})}$$

- La marge de stabilité (ε) garantie une marge de gain et une marge de phase symétriques suivantes :

$$-20 \log_{10} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_{\max}}{1 - \varepsilon_{\max}}} [\text{dB}] \leq \text{Marge de Gain} \leq +20 \log_{10} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_{\max}}{1 - \varepsilon_{\max}}} [\text{dB}] \quad (3.37)$$

$$-\frac{1}{\sin(\varepsilon_{\max})} [\text{deg}] \leq \text{Marge de Phase} \leq +\frac{1}{\sin(\varepsilon_{\max})} [\text{deg}] \quad (3.38)$$

3.7 Synthèse du régulateur statique de retour de sortie par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞

Parmi les méthodes de synthèse de la commande de vol, dites modernes, la conception du régulateur robuste statique de retour de sortie (en anglais *Static Robust Output Feedback Design*) est la plus utilisée. La synthèse est présentée dans [SL03] et [A-KHL06]. L'approche utilise l'optimisation linéaire quadratique, qui minimise une

fonction quadratique coût (\mathbb{J}), dite indice de performance (en anglais *PI Performance Index*).

$$\mathbb{J} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} [\tilde{x}^T(t) Q_{\tilde{x}} \tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t) R_{\tilde{u}} \tilde{u}(t)] dt \quad (3.39)$$

$$Q_{\tilde{x}}^T = Q_{\tilde{x}} \geq 0, \quad R_{\tilde{u}}^T = R_{\tilde{u}} > 0$$

où $\tilde{x}(t)$ est la déviation du vecteur des variables d'état, $\tilde{u}(t)$ est la déviation du vecteur des variables de commande et $(Q_{\tilde{x}}, R_{\tilde{u}})$ sont des matrices de pondération. La méthode permet de trouver la matrice de retour statique qui résulte de la balance entre l'erreur du système et l'effort de commande. Pour utiliser la méthode d'optimisation linéaire quadratique, nous devons trouver deux paramètres : la matrice de pondération d'état $Q_{\tilde{x}}$ et le facteur de pondération de la commande, généralement de forme $R_{\tilde{u}} = \rho_{\tilde{u}} I_m$. La matrice $Q_{\tilde{x}}$ doit pondérer tous les états "importants". Le facteur de pondération de la commande donne le choix au concepteur de varier les efforts de commande, afin de trouver les performances désirées, et est réglé par tests de type essai/erreur. Dans la littérature [SL03] et [A-KHL06], il est montré que l'indice de performance, \mathbb{J} , sous certaines hypothèses appropriées satisfait la relation (3.40) :

$$\mathbb{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\tilde{x}^T(t) Q_{\tilde{x}} \tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t) R_{\tilde{u}} \tilde{u}(t)] dt = \text{trace} \left[P_{are} x_0 x_0^T \right] \quad (3.40)$$

avec l'état initial (x_0) (conditions d'équilibre dans contre cas) et (P_{are}) la solution de l'équation algébrique de Riccati (3.41).

$$S_{ric}(K_y, P_{are}) = A_{cl}^T P_{are} + P_{are} A_{cl} + Q_{\tilde{x}} + C_2^T K_y^T R_{\tilde{u}} K_y C_2 \quad (3.41)$$

$$A_{cl} = A - B_2 K_y C_2 \quad ; \quad y = C_2 \tilde{x} \quad ; \quad \tilde{u} = -K_y y$$

Contrairement à la régulation optimale par retour d'état, qui est bien connue et paramétrée (la fonction **lqr** de MATLAB), la commande optimale par retour de sortie

est plus difficile à résoudre, à cause du fait que le problème est convexe seulement dans le voisinage des extremums locaux et la convergence n'est pas toujours assurée [GPS98]. Cependant le problème peut être résolu numériquement [SL03] et permet la synthèse du régulateur lorsque le vecteur d'état n'est pas complètement mesurable, qui est généralement le cas.

Soit le système linéaire invariant (3.42) et l'indice de performance (3.40).

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B_1 w + B_2 \tilde{u} & \tilde{x} &\in \mathbb{R}^n \\
 z &= C_1 \tilde{x} + D_2 \tilde{u} & \tilde{u} &\in \mathbb{R}^m \\
 y &= C_2 \tilde{x} & w &\in \mathbb{R}^l \\
 \tilde{u} &= -K_y y & y &\in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^q
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

où (z) est le vecteur des sorties mesurées et (w) est une perturbation d'énergie finie. Le système est dit atténué par le facteur (γ) [A-KHL06] si :

$$\frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt} = \frac{\int_0^\infty [\tilde{x}^T(t) Q_{\tilde{x}} \tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t) R_{\tilde{u}} \tilde{u}(t)] dt}{\int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt} \leq \gamma^2 \tag{3.43}$$

La valeur minimale $(\gamma^*) < \gamma$ introduit la marge de stabilité. Initialement, on choisit une valeur relativement grande (p.ex. $\gamma = 10$) et si l'algorithme converge on diminue γ . Cependant, pour des petites valeurs du facteur d'atténuation, γ , (3.43), l'algorithme n'est plus convergent, parce que la solution de l'équation algébrique de Riccati n'est plus semi-définie positive. Pour un certain nombre d'itérations, on trouve la valeur optimale, γ^* . Le script nous permettant de calculer le régulateur statique de retour de sortie par la méthode linéaire quadratique et H_∞ , en utilisant le logiciel MATLAB est donné dans l'annexe D. Pour $D_2 = 0_{q \times m}$, la matrice de transfert de boucle $L_{\tilde{u}Q}$, la matrice

de sensibilité en entrée S_{LQ} et la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{LQ} sont calculées comme :

$$\begin{aligned} L_{LQ} &= K_y C_2 (sI_n - A)^{-1} B_2 \\ (S_{LQ})^{-1} &= I_m + K_y C_2 (sI_n - A)^{-1} B_2 \\ T_{LQ} &= C_1 (sI_n - A + K_y C_2 B_2)^{-1} B_2 + D_2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.8 Conclusion

Les différentes stratégies de synthèse de la commande robuste d'hélicoptère présentées dans ce chapitre nous permettent de calculer le compensateur stabilisant selon le type de la perturbation ou de l'incertitude, agissant sur le modèle nominal, tenant compte des différentes spécifications et les conflits de structure de la loi de commande qui apparaissent dans le domaine fréquentiel. Une attention particulière est portée sur le problème de *loop-shaping* et le choix des fonctions de pondérations. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la synthèse d'asservissement, car elles normalisent principalement les conflits de structure, permettant l'application des algorithmes de synthèse et déterminent en conséquence la bande passante du système commandé, ainsi que la robustesse et les propriétés en termes de rejet de perturbations. Les différentes approches augmentent la diversification des solutions et permettent une meilleure adaptation de la théorie de la commande robuste pour différents types d'hélicoptères ou différents modes de vol. Cependant chaque approche impose ses spécifications et il est parfois difficile, voire impossible de remplacer l'approche sans changer les spécifications.

CHAPITRE 4 : EXPÉRIMENTATIONS

4.1 Introduction

Après l'étude théorique de la synthèse des compensateurs et sa mise en application dans le chapitre 3, voyons maintenant quelles sont les performances atteintes. Nous étudierons dans un premier temps les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel, puis les réponses temporelles du système bouclé à différentes entrées caractéristiques. Pour étudier l'hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky, nous allons considérer le mode de vol donné au chapitre 3, qui est le voisinage du vol stationnaire à 60 [pi] d'altitude du niveau de référence avec $V_E = [0,5 \ 0 \ 0]^T$ [kt]; $\omega_E = [0 \ 0 \ 0]^T$ [rad/s]. Le modèle linéaire analytique incertain avec perturbation atmosphérique, qui est défini avec MATLAB comme suit :

```
>> UH60AControl
USS: 22 States, 9 Outputs, 4 Inputs, Continuous System
  BLCG: real, nominal = 0, variability = [-1 1], 14 occurrences
  FSCG: real, nominal = 356, variability = [-2.86597 1.2082]%, 10 occurrences
  lxx: real, nominal = 5.63e+003, variability = [-5.14147 48.3784]%, 54 occurrences
  lxx: real, nominal = 1.67e+003, variability = [-8.11928 70.4246]%, 54 occurrences
  lyy: real, nominal = 4e+004, variability = [-2.93794 7.27915]%, 6 occurrences
  lzz: real, nominal = 3.72e+004, variability = [-3.45999 7.3341]%, 54 occurrences
  WLCG: real, nominal = 248, variability = [-1.53102 1.16841]%, 10 occurrences
  Weight: real, nominal = 1.68e+004, variability = [-7.99772 20.3573]%, 85 occurrences
```

a été développé dans le chapitre 2 et s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}} &= \underline{A}_h \underline{x} + \begin{bmatrix} \underline{B}_{hgust} & \underline{B}_h \end{bmatrix} \underline{U} ; \underline{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_l^T & \underline{x}_R^T & \underline{x}_C^T \end{bmatrix}^T ; \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{x}_p^T & \underline{u}^T \end{bmatrix}^T \\
 \underline{y} &= \underline{x}_l = \underline{C}_h \underline{x} ; \underline{u} = \begin{bmatrix} \eta_{coll} & \eta_{lat} & \eta_{long} & \eta_{pedal} \end{bmatrix}^T \\
 \tilde{\underline{x}}_l &= \begin{bmatrix} \dot{x}_l, \dot{y}_l, \dot{h}(\dot{h} = -\dot{z}_l), \phi_b, \theta_b, \psi_b, \dot{\phi}_b, \dot{\theta}_b, \dot{\psi}_b \end{bmatrix}^T \\
 \underline{x}_l &= \begin{bmatrix} \dot{x}_l, \dot{y}_l, \dot{h}(\dot{h} = -\dot{z}_l), \phi_b, \theta_b, \psi_b, p_b, q_b, r_b \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

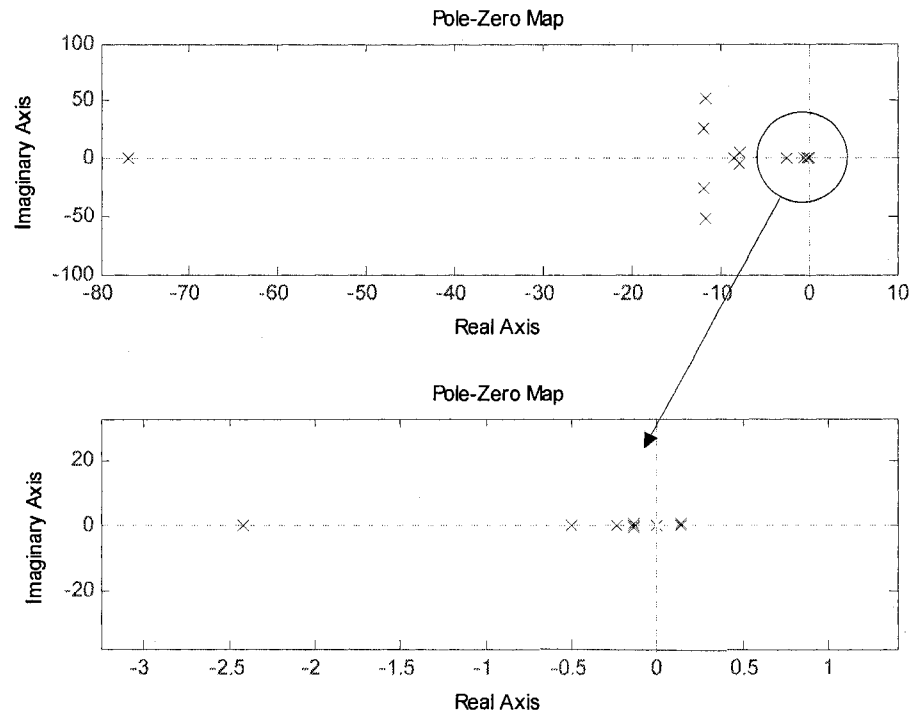


Figure 4.1 Positionnement des pôles du modèle nominal en boucle ouverte

Les quatre pôles les plus rapides $(-76,92)$ correspondent à la dynamique de l'actionnement du plateau cyclique et l'angle de pas du rotor de queue. L'instabilité du système est caractéristique de tous les hélicoptères au voisinage du vol stationnaire et est liée aux deux pôles oscillatoires instables du mode phugoïde longitudinal $(0,1384 \pm j4183)$ et présente un intégrateur pur du mode spiral (0) . Les modes oscillatoires stables et rapides de conicité $(-11,8295 \pm j25,9311)$ et d'avancement $(-11,6984 \pm j52,2723)$ et régressif $(-7,8802 \pm j4,1044)$ correspondent à la dynamique du rotor principal. Les autres modes théoriques sont : de phugoïde latéral $(-0,1338 \pm j0,4516)$, d'incidence $(-8,5191)$, de roulis pur $(-2,4198)$ et de roulis hollandais $(-0,2360 \pm j0,0685)$ qui peuvent être spécifiés comme mode rapide ou mode phugoïde. Le mode rapide est un mouvement en roulis ou en tangage oscillatoire

de courte durée. Cependant le mode phugoïde ou mode de période longue est un mouvement oscillatoire, faiblement amorti. L'allure fréquentielle des valeurs singulières du modèle nominal en boucle ouverte est visualisée à la [figure 4.2](#).

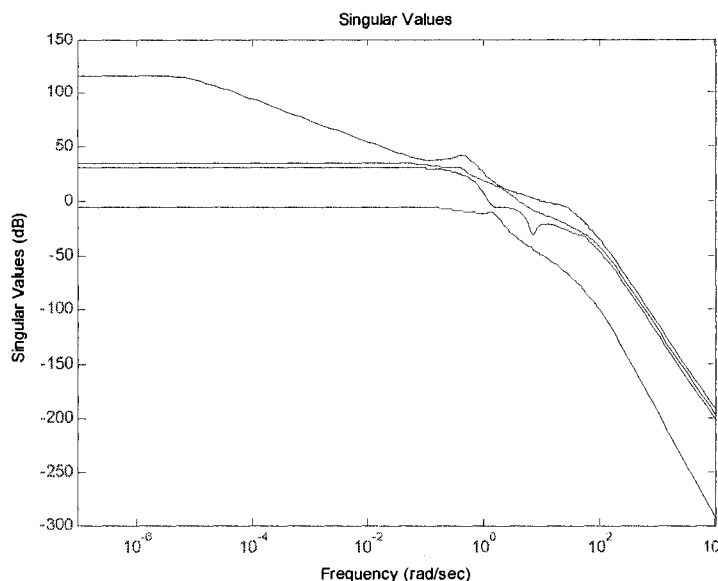


Figure 4.2 Valeurs singulières du modèle nominal en boucle ouverte

L'analyse des valeurs singulières du modèle nominal en boucle ouverte révèle le faible gain statique d'un des circuits et surtout le nombre conditionnel relativement grand.

4.3 Performances du compensateur H_∞ par la méthode de sensibilité mixte

Dans cette section nous allons présenter les performances du compensateur central H_∞ par la méthode de la sensibilité mixte. Certains principes de base du choix initial des fonctions de pondération pour la synthèse du compensateur H_∞ par la méthode de sensibilité mixte sont donnés dans l'annexe C. Étudions maintenant plus en détail le choix des pondérations que nous allons utiliser lors de la synthèse du compensateur.

4.3.1 Choix de la matrice de pondération sur l'erreur $W_{e_{mix}}(s)$

La fonction de pondération sur l'erreur $W_{e_{mix}}(s)$ est matricielle et le choix initial se présente sous la forme :

$$W_{e_{mix}}(s) = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \frac{.5(s+12)}{s+.006} & \frac{.5(s+5)}{s+.0025} & \frac{\frac{s}{2}+2.5}{s+.0025} & \frac{\frac{s}{2}+5}{s+.005} & \frac{2s}{(s+4)(s+4.5)} & \frac{2s}{(s+4)(s+4.5)} \end{bmatrix} \right) \quad (4.2)$$

Étant donné que la pulsation naturelle du mouvement non modélisé de traînée est de l'ordre de $12 \text{ [rad s}^{-1}\text{]}$, pour les quatre premiers circuits, nous avons choisi les fréquences initiales de coupure respectivement de $6 \text{ [rad s}^{-1}\text{]}$, $2.5 \text{ [rad s}^{-1}\text{]}$, $2.5 \text{ [rad s}^{-1}\text{]}$ et $5 \text{ [rad s}^{-1}\text{]}$ qui vont assurer que la dynamique du système de commande ne soit pas couplée avec la dynamique non modélisé de traînée. La valeur maximale initiale de la norme H_{∞} de la matrice de sensibilité S_{mix} en basse fréquence est introduite par le facteur 0.5, qui pour les deux premiers circuits est explicitement démontré. Cependant, la valeur initiale de l'erreur de poursuite en régime établi est introduite par le facteur 0.001 sur les pôles des quatre premiers circuits. Pour les circuits de vitesse en tangage et de vitesse en roulis, nous avons choisi un filtre de deuxième ordre de type passe-bande qui a pour but de rejeter les perturbations et les effets de couplage dans la bande de $4 \text{ [rad s}^{-1}\text{]}$ à $7 \text{ [rad s}^{-1}\text{]}$.

4.3.2 Choix de la matrice de pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$

La fonction de pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$ est également matricielle (4.3) et a pour objectif de minimiser l'influence des dynamiques négligées en hautes fréquences. La valeur de $W_{u_{mix}}^{-1}(s)$ en hautes fréquences devra être faible et ajustée afin que la courbe de la matrice de sensibilité S_{mix} suive au plus près celle de la matrice de pondération

$W_{e_{mix}}(s)$. La fréquence de coupure de ces pondérations $W_{u_{mix}}(s)$ est très importante puisqu'elle fixe la bande passante des asservissements. Respectant la dynamique non modelée de traînée, la fréquence de 12 [rad/s] est fixée comme la limite supérieure et la limite inférieure est fixée à -100 [dB] pour s'assurer que la pondération $W_{u_{mix}}(s)$ sera dominée par $W_{e_{mix}}(s)$ en basses fréquences. Cette réflexion découle de la fonction coût (3.21) et reflète les objectifs de performance. Le choix initial de la matrice de pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$ est donné par (4.3). L'allure fréquentielle de la matrice de pondération sur la commande $W_{u_{mix}}(s)$ est visualisée à la figure 3.5.

$$W_{u_{mix}}(s) = \text{diag} \left(\left[\frac{s + .00012}{s + 12} \quad \frac{s + .00012}{s + 12} \quad \frac{s + .00012}{s + 12} \quad \frac{s + .00012}{s + 12} \right] \right) \quad (4.3)$$

4.3.3 Choix de la matrice de pondération constante W_{ad}

La matrice de pondération constante W_{ad} doit pondérer les entrées fictives avec petites valeurs. Pour ces derniers, nous avons choisi le poids (0.05), qui contribue à un certain rejet de perturbations sur les sorties additionnelles sans toutefois influencer de manière significative le système augmenté. Étant donné un paramètre de design, la matrice de pondération constante W_{ad} doit privilégier de manière relativement égale les principaux signaux de référence. Ainsi, notre choix initial est le suivant :

$$W_{ad} = \text{diag}([1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0.05 \quad 0.05]) \quad (4.4)$$

Cependant la modification itérative des fonctions de pondération est un problème d'expertise et d'expérience, et est un processus dicté par la volonté de "façonner" les valeurs singulières des fonctions de transfert caractéristiques pour satisfaire les objectifs de performance en respectant la régularité du problème H_∞ résultant. La difficulté de ce processus est accrue d'avantage, lorsque le système est sous-actionné, qui est bien notre cas, c'est-à-dire que le nombre des degrés de libertés du système est supérieur au

nombre des entrées. Pour la structure de la boucle de commande illustrée à la figure 3.3

avec $\tilde{C}_1 = [\dot{h}_b(\dot{y}_l + \phi_b), (\dot{x}_l + \theta_b), r_b, p_b, q_b]^T$ et les matrices de pondération finales :

$$W_{e_{mix}}(s) = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{cccc} \frac{.4545s+3.5}{s+.56} & \frac{.8929s+2.5}{s+.00125} & \frac{.8929s+2.5}{s+.0025} & \frac{.4545s+3.5}{s+2.15} \dots \\ \frac{2s}{(s+4)(s+4.5)} & \frac{2s}{(s+4)(s+4.5)} \end{array} \right] \right)$$

$$W_{u_{mix}}(s) = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{cccc} \frac{100s+.01}{s+10} & \frac{4s+.0004}{s+10} & \frac{9.2s+.00092}{s+10} & \frac{4.6s+.00046}{s+10} \end{array} \right] \right)$$

$$W_{ad} = \text{diag}([0, 277 \quad 0, 419 \quad 0, 26 \quad 0, 4201 \quad 0, 05 \quad 0, 05])$$

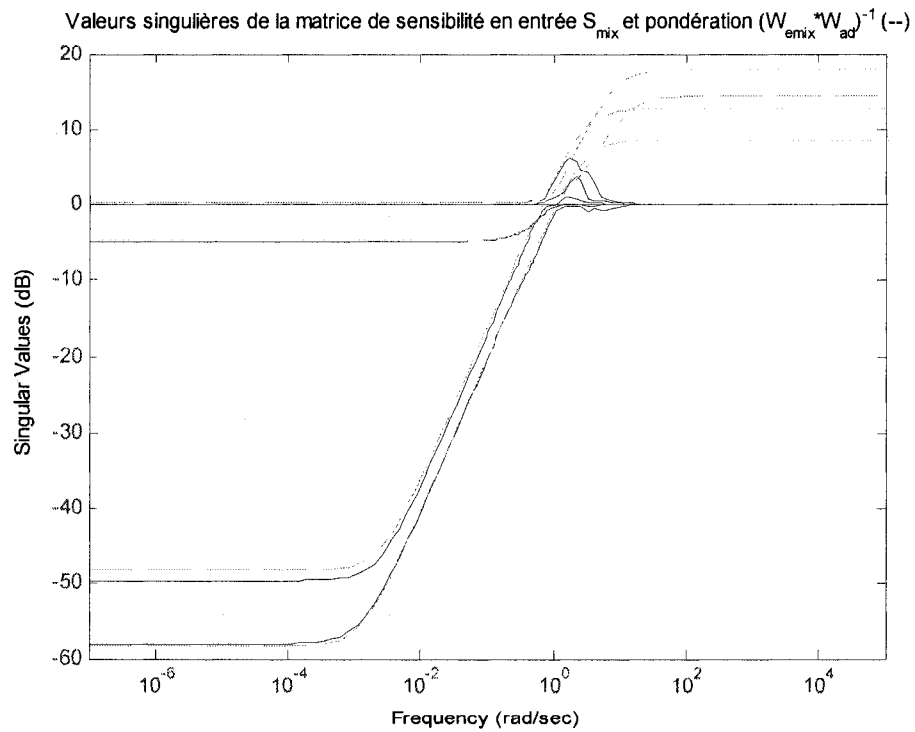


Figure 4.3 Valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{mix} et

pondérations $(W_{e_{mix}}(s) W_{ad})^{-1}$

La fonction **hinfsyn** de MATLAB calcule le compensateur dynamique K_{mix} , qui stabilise le système en boucle fermée. Le critère de performance correspondant est $\gamma^* = 1.0001$.

L'allure fréquentielle des valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{mix} et est visualisées à la figure 4.3. Nous remarquons que l'une des courbes de la matrice sensibilité en entrée S_{mix} est située temporairement au dessus de la fonction de pondération $(W_{e_{mix}}(s)W_{ad})^{-1}$, c'est-à-dire que nous avons $\|W_{e_{mix}}S_{mix}W_{ad}\|_{\infty} < \gamma^*$ dans cette intervalle, où $\gamma^* = 1.0001$, et non $\|W_{e_{mix}}S_{mix}W_{ad}\|_{\infty} < 1$. Pourtant ce résultat est acceptable, vue la différence minime.

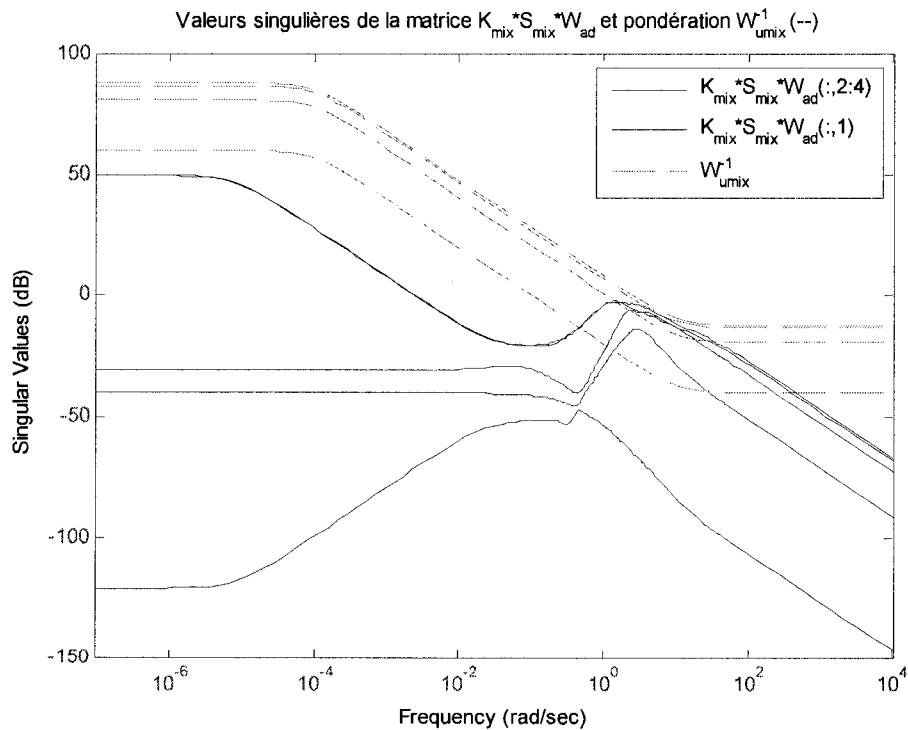


Figure 4.4 Valeurs singulières de la matrice $K_{mix} S_{mix} W_{ad}$ et pondérations W_{umix}^{-1}

L'allure fréquentielle des valeurs singulières de la matrice $K_{mix} S_{mix} W_{ad}$ est visualisée à la figure 4.4. Elle montre que les valeurs singulières de la matrice $K_{mix} S_{mix} W_{ad}$ restent inférieures en gain à celles de la matrice de pondération $W_{mix}^{-1}(s)$.

Nous avons vérifié qu'en général, les valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{mix} et de la matrice $K_{mix} S_{mix}$ restent bornées par les fonctions de pondération choisies à un facteur multiplicateur γ près. L'analyse des valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{mix} montre que l'allure fréquentielle des principaux signaux (les entrées du pilote) est atténuée en basse fréquences et assure le rejet des perturbations atmosphériques qui prennent son sens en basses fréquences.

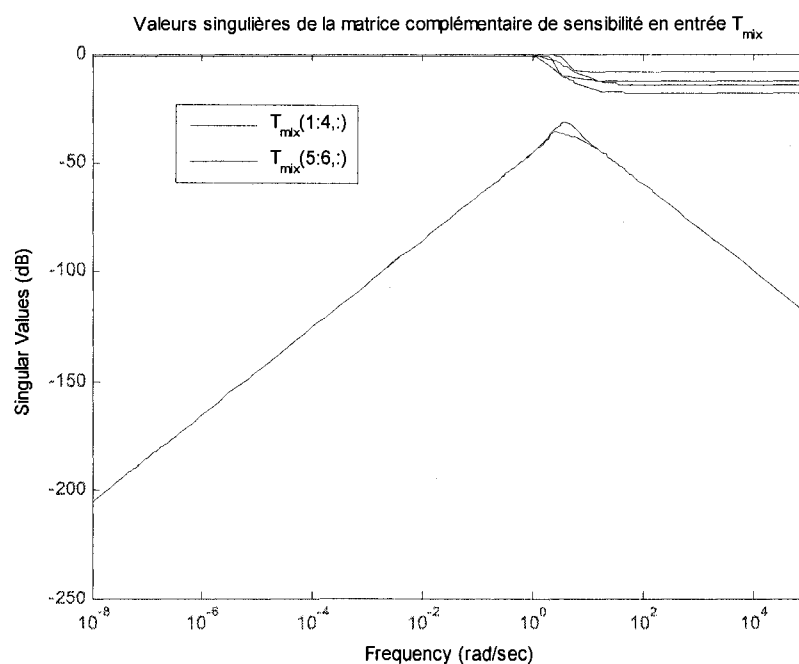


Figure 4.5 Valeurs singulières de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{mix}

À la figure 4.3, les valeurs singulières correspondant aux vitesses de roulis et de tangage sont presque partout égales à 0 [dB]. Les valeurs singulières de la matrice $K_{mix}S_{mix}$ sont faibles, à l'exception du circuit "collectif", et donc l'énergie de la commande sera réduite.

La figure 4.5 présente l'allure fréquentielle des valeurs singulières de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{mix} . L'analyse de ces dernières montre que le système en boucle fermée permet une poursuite des principaux signaux (les entrées du pilote) sans réduction significative de l'amplitude et atténue les entrées additionnelles (fictives). Comme nous le souhaitons dans le chapitre 3, le nombre conditionnel de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{mix} est faible en basse fréquence avec un gain presque égale à 0 [dB] et finalement, nous pouvons conclure que l'allure fréquentielle du système asservi correspond aux objectifs de performance définis dans le chapitre 3.

Voyons maintenant les réponses temporelles du système commandé avec un compensateur H_∞ par la méthode de la sensibilité mixte, incluant explicitement l'effet des perturbations $\underline{x}_p = \begin{bmatrix} u_g & v_g & w_g \end{bmatrix}^T$, introduites par la matrice $B_{hgust}(:,1:3)$, sur les vitesses linéaires de l'hélicoptère.

$$B_{hgust}(1:11,1:3) = \begin{bmatrix} 0.7122 & 0.0455 & 1.7087 \\ 0.3728 & 0.9659 & -0.0792 \\ 4.0563 & -0.0335 & 0.0322 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2605 & 1.399 & 1.3004 \\ -0.1654 & -0.1052 & -0.3305 \\ 0.0467 & 0.0856 & 0.0552 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{hgust}(12:22,1:3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 19.162 & 0.0001 & 0.055 \\ -2.8629 & 19.0447 & 0.3322 \\ 5.6947 & -1.3953 & -34.7912 \\ -0.0026 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0009 & 0.0001 \\ 0.0002 & -0.0004 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rappelons les équations différentielles matricielles (4.1) du système perturbé.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}_h \underline{x} + [\underline{B}_{hgust} \quad \underline{B}_h] \underline{U} ; \underline{x} = [\tilde{\underline{x}}_I^T \quad \underline{x}_R^T \quad \underline{x}_C^T]^T ; \underline{U} = [\underline{x}_P^T \quad \underline{u}^T]^T \\ y &= \tilde{C}_I C_h \underline{x} ; \underline{u} = [\eta_{coll} \quad \eta_{lat} \quad \eta_{long} \quad \eta_{pedal}]^T \\ \tilde{\underline{x}}_I &= [\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{h}(\dot{h} = -\dot{z}_i), \phi_b, \theta_b, \psi_b, \dot{\phi}_b, \dot{\theta}_b, \dot{\psi}_b]^T \\ y &= [\dot{h}, (\dot{y}_i + \phi_b), (\dot{x}_i + \theta_b), r_b, p_b, q_b]^T\end{aligned}$$

La structure du système est présentée à la [figure 3.6](#). Le script permettant de mettre la dynamique de l'hélicoptère sous la forme standard selon la figure 3.6 est donné dans l'annexe D. Après un certain nombre de tests, nous avons fixé la valeur de $(\alpha_{gust} = 0.1)$.

Le critère de performance correspondant est $\gamma^* = 0.9777$.

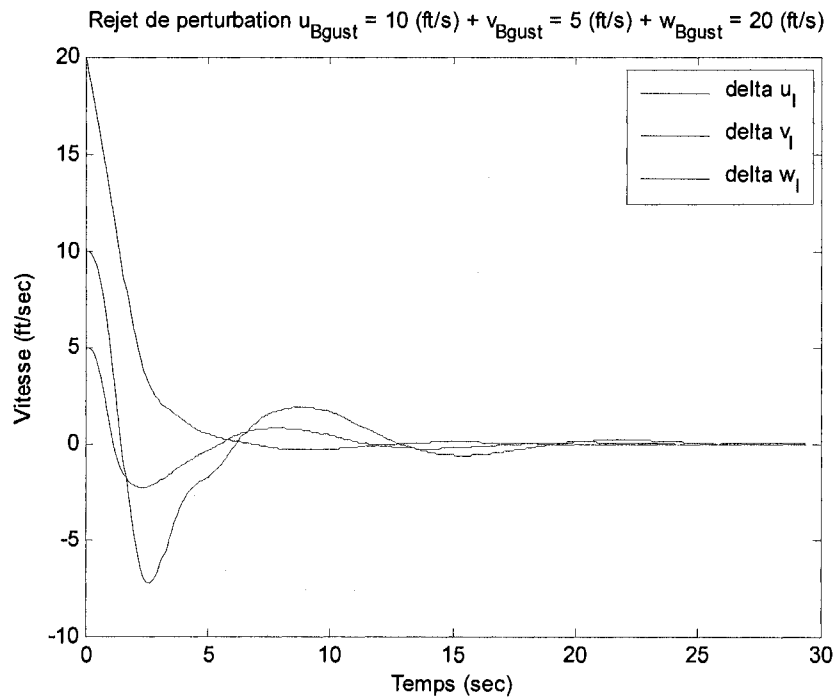


Figure 4.6 Rejet de perturbations atmosphériques avec un compensateur H_∞ conçu par la méthode de sensibilité mixte

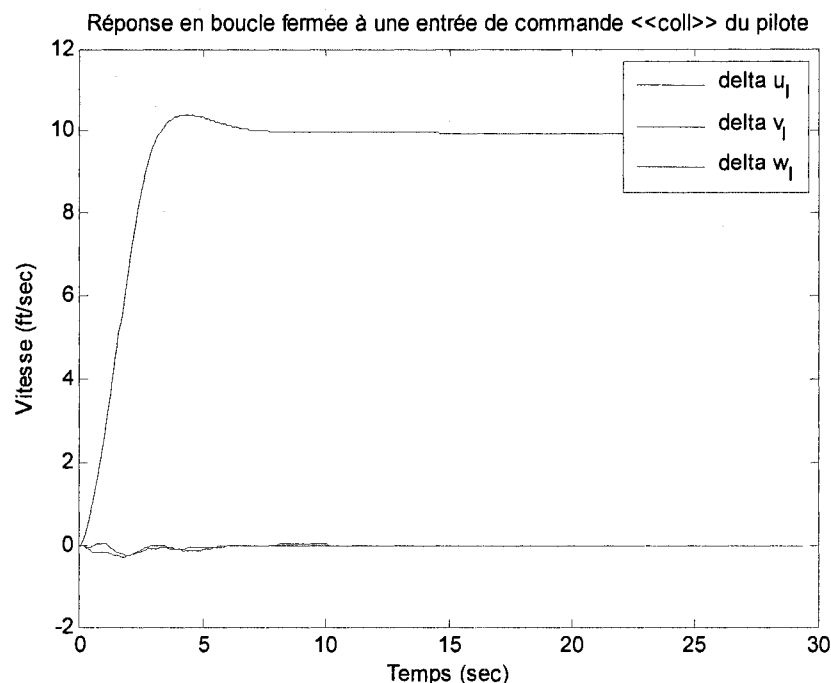


Figure 4.7 Réponse en boucle fermée à (un échelon) une entrée de commande collective du pilote de 5" pour un système asservi avec un compensateur H_∞ , conçu par la méthode de sensibilité mixte

Certains résultats temporels du système en boucle fermée sont visualisés à la [figure 4.6](#) et la [figure 4.7](#) et correspondent respectivement à une entrée en échelon de $\underline{x}_p = [10, 5, 20]^T [\text{pi s}^{-1}]$ et à une entrée de 5" sur le levier collectif du pilote. On remarque que le compensateur annule l'effet de la perturbation après un régime transitoire en stabilisant la vitesse linéaire de l'hélicoptère. Le temps de réponse et le dépassement de la réponse en vitesse pour un échelon à l'entrée collective du pilote de 5" sont acceptables dans le contexte de rapidité et confort : ils sont respectivement $t_r = 2.7 [s]$ et 4%. La précision est excellente puisque l'erreur statique est inférieure à 0.15%. Nous pouvons constater également le découplage statique (en régime établi) de la vitesse d'ascension par rapport à la vitesse dans le plan horizontal qui provient de la matrice du découplage statique, calculée généralement pour le mode de vol stationnaire.

Cependant, la loi de commande d'hélicoptère pour toute l'enveloppe de vol doit également calculer le découplage dynamique des réponses du giravion en vitesse.

4.4 Performances du compensateur H_∞ par la méthode de "loop-shaping" et factorisation en élément premiers

Le principe de base pour le choix des fonctions de pondération est expliqué par McFarlane et Glover dans [McFG92]. Le pré-filtre $W_{1s}(s)$ est composé de blocs PI, dont le but est d'augmenter le gain en basse fréquence. Le zéro dans le bloc PI est utilisé pour réduire le taux de décroissance des valeurs singulières du système pondéré en boucle ouverte, inférieure à $-40(\text{dB})$, au voisinage de sa valeur. Dans notre cas, la fonction $W_{2s}(s)$ est une matrice scalaire diagonale qui favorise les principaux circuits (les quatre entrées du pilote) par rapport aux circuits additionnels et fictifs de vitesse de roulis et de vitesse de tangage. Pour le système présenté dans la section 3.6 et les matrices de pondération suivantes :

$$\begin{aligned} W_{1s} &= \text{diag} \left(\left[\frac{s+9}{s} \quad \frac{s+17}{s} \quad \frac{s+2}{s} \quad \frac{s+1}{s} \right] \right) \\ W_{2s} &= \text{diag} ([.8 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad .1 \quad .5]) \\ k_{LS} &= \text{diag} ([.1 \quad .1 \quad .1 \quad .11]) \end{aligned}$$

l'allure fréquentielle des valeurs singulières du système pondéré en boucle ouverte est visualisée à la [figure 4.8](#). La [figure 4.9](#) présente respectivement l'allure fréquentielle des valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{LS} et de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{LS} . Comme nous le souhaitons dans le chapitre 3, les valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{LS} des principaux signaux (les entrées du pilote) sont faibles en basse fréquences ce qui permet le rejet des perturbations sur la sortie, de type rafales.

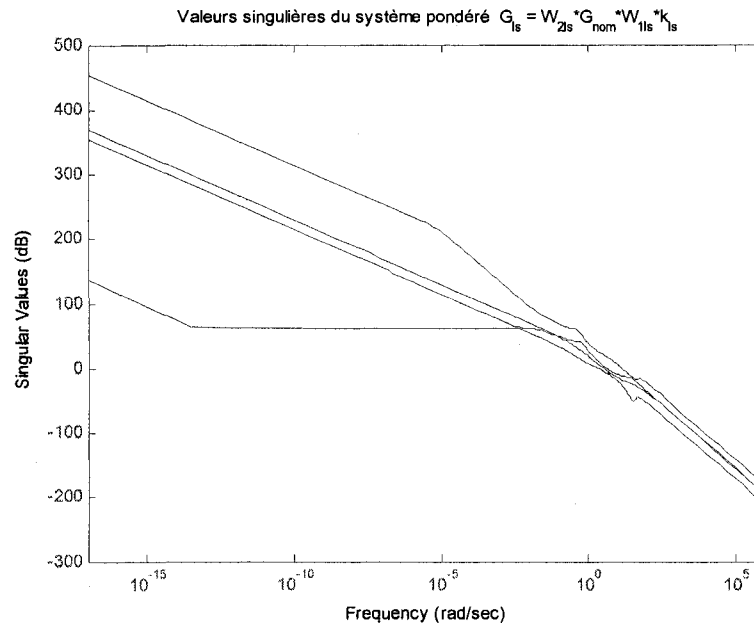


Figure 4.8 Valeurs singulières du système pondéré en boucle ouverte

Les valeurs singulières correspondant aux circuits additionnels fictifs de vitesses de roulis et de tangage sont presque partout égales à 0 [dB]. L'analyse de l'allure fréquentielle des valeurs singulières de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{mix} montre que le système en boucle fermée permet une poursuite des entrées du pilote sans réduction significative de l'amplitude, à l'exception du circuit en lacet, et atténue les entrées additionnelles. La valeur calculée de la marge de stabilité est $\gamma^* = 6,4104$. Finalement, nous pouvons conclure que la bande passante du système asservi est relativement basse et les qualités de manœuvrabilité ne sont pas atteintes. Tous nos efforts afin d'améliorer la performance du système ont corrompu la stabilité à cause surtout de la structure diagonale des matrices de pondération qui ne permettent pas de mieux façonner les valeurs singulières du système en boucle ouverte au voisinage de la fréquence de coupure. La valeur de la marge de stabilité indique également que le système asservi garantit la stabilité pour 15% d'incertitude paramétriques additives sur

la factorisation en éléments premiers à gauche et donc privilégie la performance par rapport à la robustesse.

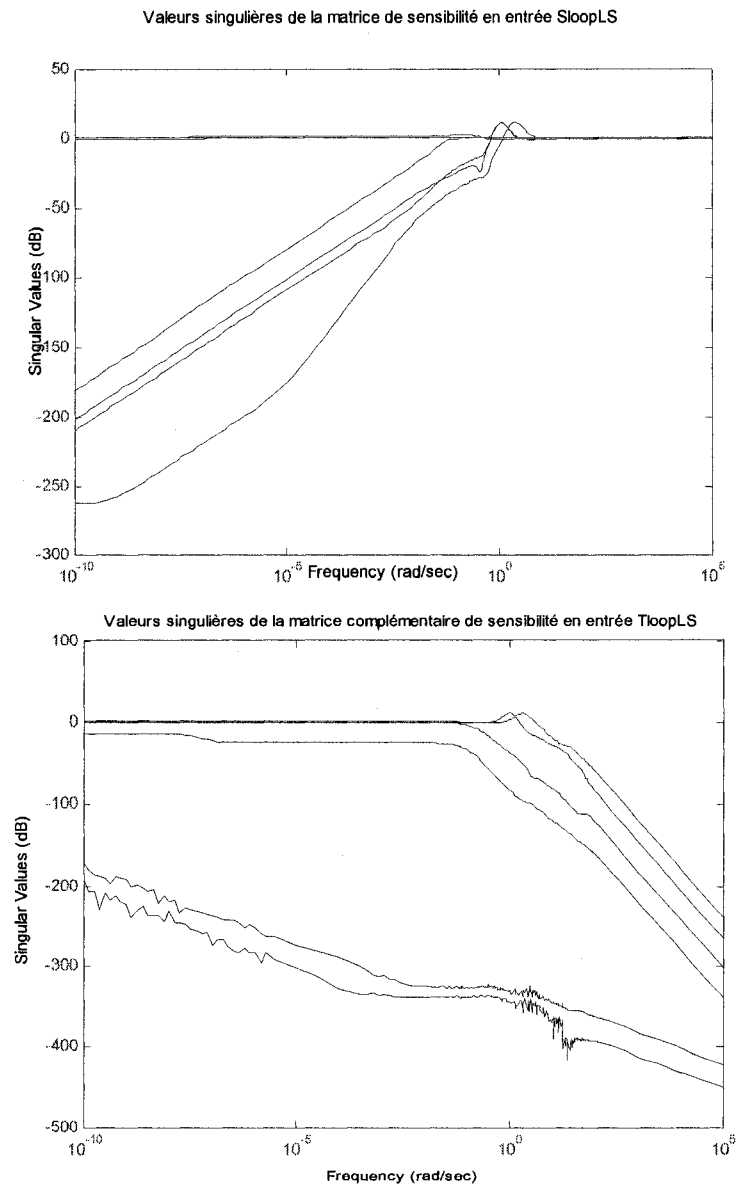


Figure 4.9 Valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{LS} et de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{LS}

4.5 Performances du régulateur statique de retour de sortie par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞

Pour le système présenté dans la section 3.7, nous avons choisi un poids égal sur les variables de sortie $Q_{\hat{x}} = C_h^T C_h$ et les différents circuits de commande $R_{\hat{u}} = I_4$. Nous supposons également une perturbation $\underline{x}_p^T(1:3) = [u_g \quad v_g \quad w_g]^T$, introduite par la matrice $B_{h_{gust}}(:,1:3)$, sur la vitesse de l'hélicoptère. Le script qui nous permet de calculer le régulateur statique de retour de sortie par la méthode linéaire quadratique et H_∞ , en utilisant le logiciel MATLAB, est donné dans l'annexe D. Le paramètre d'entrée (γ) du script introduit la norme euclidienne désirée. Initialement, on choisit une valeur relativement grande (p.ex. $\gamma=10$) et si l'algorithme converge on diminue (γ) en projetant la matrice de retour de sortie K_y sur l'espace perpendiculaire du noyau de la matrice C_h . Cependant, pour des petites valeurs du facteur d'atténuation (γ), introduit par l'expression (3.41), l'algorithme ne converge plus, parce que la solution de l'équation algébrique de Riccati n'est plus semi-définie positive. Pour un certain nombre d'itérations, on trouve la valeur optimale $\gamma^* = 0,92$. La matrice de retour de sortie K_y trouvée est donnée par :

0.1962	-0.0192	-1.052	0.738	-5.3189	-0.0823	0.184	-2.262	-0.2509
-0.0621	0.9004	-0.0143	14.9478	-2.9723	0.639	-0.2626	-4.1579	0.099
0.8241	0.3475	0.2277	11.0165	-31.1802	0.6436	-0.6132	-11.1833	0.1794
0.758	-0.5515	0.4296	3.3284	-37.8218	1.1215	-1.4858	-15.6805	0.8352

Les pôles en boucle fermée sont :

-76.9102 + 0i	-2.788 + 6.6297i
-76.9144 + 0i	-2.788 - 6.6297i
-76.9231 + 0i	-4.367 + 0i
-76.9228 + 0i	-2.3035 + 0i
-11.82 + 52.4843i	-0.938 + 0.8257i
-11.82 - 52.4843i	-0.938 - 0.8257i
-4.2384 + 25.3462i	-0.2773 + 0.0891i
-4.2384 - 25.3462i	-0.2773 - 0.0891i
-11.0552 + 2.5694i	-0.1336 + 0i
-11.0552 - 2.5694i	-0.5008 + 0.0037i
-11.039 + 0i	-0.5008 - 0.0037i

L'allure fréquentielle des valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{LQ} et de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{LQ} est visualisée à la [figure 4.10](#). Nous pouvons noter que les valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{LQ} sont toutes sous 0 [dB] qui assure le rejet des perturbations atmosphériques qui prennent son sens en basses fréquences et que le gain proche à unité pour trois des quatre canaux des valeurs singulières de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{LQ} permet une poursuite des consignes du pilote sans atténuation. Cependant la bande passante est inférieure à 1 [rad/s].

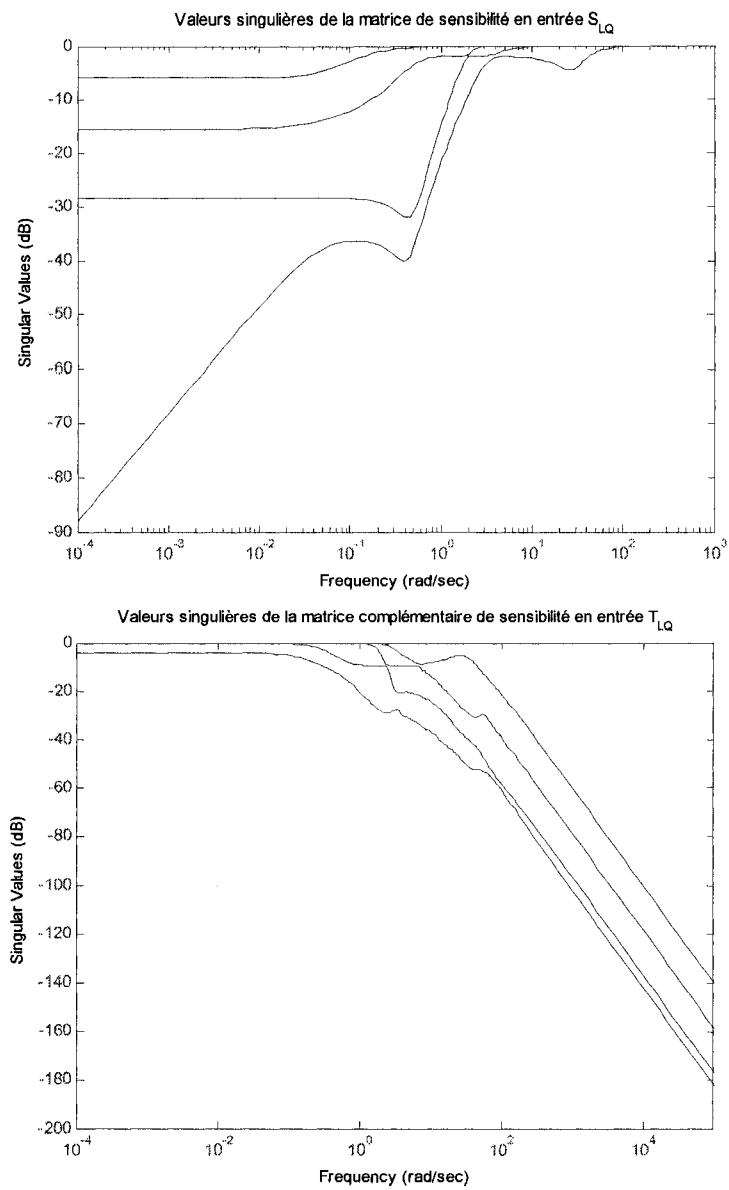
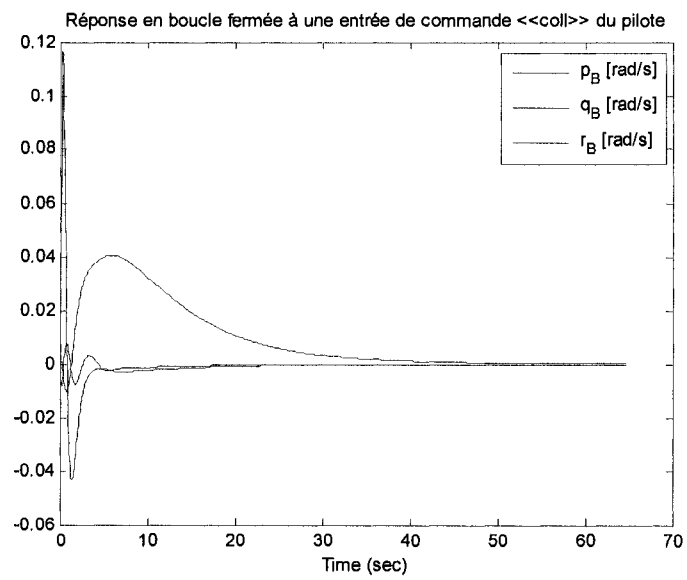
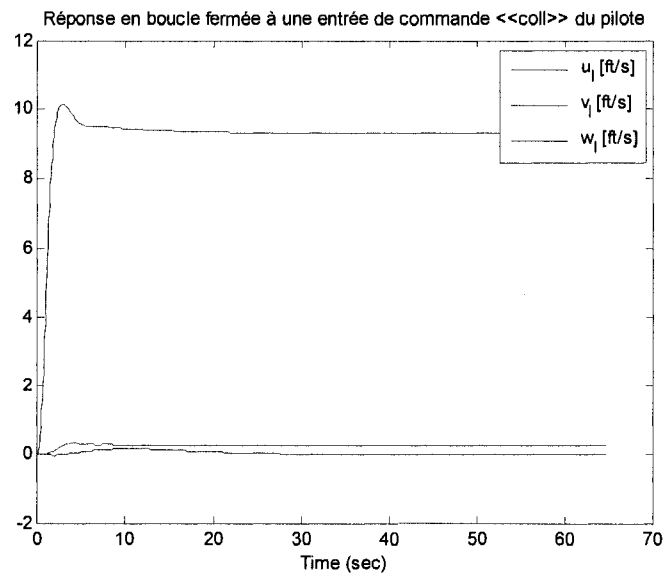


Figure 4.10 Valeurs singulières de la matrice de sensibilité en entrée S_{LQ} et de la matrice complémentaire de sensibilité en entrée T_{LQ}



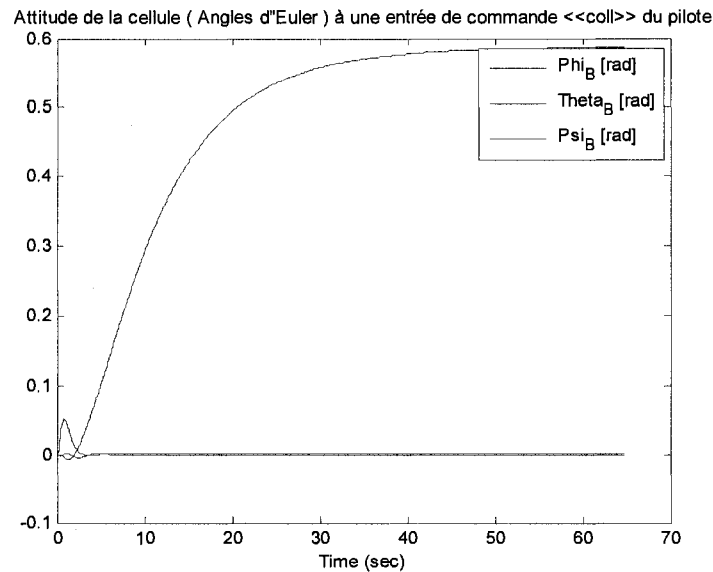


Figure 4.11 Réponse en boucle fermée à (un échelon) une entrée de commande collective de 5" du pilote pour un système asservi avec un compensateur, conçu par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞

Les réponses en vitesses linéaires à un échelon de commande collective de 5" du pilote pour l'hélicoptère asservi avec un compensateur, conçu par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞ peuvent être directement comparées aux réponses du même système asservi avec un compensateur H_∞ , conçu par la méthode de sensibilité mixte. Sur la [figure 4.11](#), on constate le couplage relativement plus important de la vitesse d'ascension par rapport à la vitesse longitudinale, l'erreur statique de 7% et les plus grandes valeurs du temps de réponse et du dépassement de la réponse en vitesse pour un échelon à l'entrée collective du pilote, respectivement de $t_r = 4 [s]$ et de 8%, comparées avec les courbes de réponse en vitesse à la [figure 4.7](#).

Pour des raisons d'insuffisance de mémoire (de calcul) sur les ordinateurs dans les salles informatiques de l'École Polytechnique, l'analyse des marges de stabilité du système en boucle fermée ne peut être faite que seulement pour un seul paramètre incertain. Pour

cette raison, nous avons choisi la variation du poids totale de l'hélicoptère, laissant les autres paramètres incertains à leur valeur nominale. La fonction **robuststab** de MATLAB, calcule les marges de stabilité, la valeur et la fréquence de déstabilisation, et donne le rapport suivant :

```
[stabmargLQ, destabuncLQ, report_robuststabLQ, info_robuststabLQ] = robuststab(TloopLQsubs)

stabmargLQ =
    UpperBound: 2.2941
    LowerBound: 2.2369
    DestabilizingFrequency: 173.8244

destabuncLQ =

    Weight: 1.0321e+008

report_robuststabLQ =

Uncertain System is robustly stable to modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 224% of the modeled uncertainty.
-- A destabilizing combination of 229% of the modeled uncertainty exists,
    causing an instability at 174 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
    'Weight' is 101%. Increasing 'Weight' by 25% leads to a 25% decrease in the margin.

info_robuststabLQ =

    Sensitivity: [1x1 struct]
    Frequency: [262x1 double]
    BadUncertainValues: {262x1 cell}
    MussvBnds: [1x2 frd]
    MussvInfo: [1x1 struct]
```

Le rapport nous indique que le compensateur, conçu par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞ , garantie la stabilité pour toute variation du poids totale de l'hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky, donnée du constructeur (tableau 2), selon la mission et l'équipement additionnel.

4.6 Conclusions

Dans le cadre de l'expérimentation des lois de commande de l'hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky pour un mode de vol au voisinage du vol stationnaire, nous avons utilisé différentes stratégies pour la synthèse du compensateur selon l'information sur le type des incertitudes et des perturbations. Les méthodes nous ont permis de garantir la stabilité du système étudié avec une marge de stabilité pour toutes incertitudes admissibles, entre autre, d'assurer certaine flexibilité entre performance et robustesse. Dans ce sens les objectifs liés avec la robustesse de la loi de commande d'hélicoptère, définis dans le chapitre 1, ont été atteints.

Parmi les structures de commande réalisées, le compensateur H_∞ , conçu par la méthode de sensibilité mixte et le régulateur statique de retour de sortie par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞ nous ont permis d'atteindre de meilleurs performances avec un excellent critère de performance, respectivement de 1,0001 et 0,92, comparativement à la méthode de "loop-shaping" et factorisation en élément premiers. Cependant les qualités de manœuvrabilité n'ont pas été atteintes surtout à cause de la fréquence de coupure inférieure à 1 [rad/s].

Comme perspectives de cette recherche, nous pensons qu'il serait souhaitable :

- D'explorer la conception du régulateur robuste statique de retour de sortie avec contraintes sur la matrice de retour.
- De considérer d'autre type de pondérations, également des matrices de pondérations avec termes croisés.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les travaux proposés dans cette recherche présentent une extension à la modélisation et à l'étude des méthodes d'analyse et de synthèse des lois de commande robuste pour la dynamique de vol d'hélicoptère.

Ce projet a été réalisé en deux grandes étapes : dans une première partie, nous avons développé un modèle mathématique d'hélicoptère avec un rotor principal articulé, basé sur les mouvements de battement et de traînée de la pale, dus à une combinaison des charges aérodynamiques, de l'inertie et de la masse de la pale. Le modèle linéaire analytique a été développé à partir d'un modèle non linéaire de la cellule, considérée comme un corps rigide, le rotor principal et le rotor de queue et d'un modèle atmosphérique, et tient compte de la dynamique de battement vertical des pales et de la vitesse induite. Ce travail théorique, reprenant les principes de la mécanique et de l'aérodynamique, a été ensuite appliqué à l'hélicoptère UH-60A Black Hawk de Sikorsky. Dans une seconde partie, nous avons traité la synthèse de la loi de commande d'hélicoptère. Après une revue de la littérature sur ce domaine, nous avons choisi de concevoir la loi de commande d'hélicoptère par l'approche H_{∞} , basée sur la sensibilité mixte, par la méthode de "loop-shaping", ou par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_{∞} et les développements théoriques récents qui permettent la conception d'un compensateur robuste statique ou dynamique.

Dans le cadre de l'expérimentation des lois de commande de l'hélicoptère UH-60A (Black Hawk) de Sikorsky pour un mode de vol au voisinage du vol stationnaire, nous avons utilisé différentes stratégies pour la synthèse du compensateur selon l'information sur le type des incertitudes et des perturbations. Les méthodes nous ont permis de garantir la stabilité du système étudié avec une marge de stabilité pour toutes incertitudes admissibles, entre autre, d'assurer une certaine flexibilité entre performance et robustesse. Dans ce sens les objectifs liés avec la robustesse de la loi de commande

d'hélicoptère, définis dans le chapitre 1, ont été atteints. Les difficultés majeures rencontrées dans cette recherche, résident dans les couplages entre les variables d'état et le nombre considérable de degrés de liberté.

Parmi les structures de commande réalisées, le compensateur H_∞ , conçu par la méthode de sensibilité mixte et le régulateur statique de retour de sortie par la méthode d'optimisation linéaire quadratique et H_∞ nous ont permis d'atteindre de meilleurs performances avec un excellent critère de performance, respectivement de 1,0001 et 0,92, comparativement à la méthode de "*loop-shaping*" et factorisation en élément premiers. Cependant les qualités de manœuvrabilité n'ont pas été atteintes surtout à cause de la fréquence de coupure inférieure à 1 [rad/s].

Pour ce qui concerne la modélisation, comme perspective de cette recherche, nous pensons qu'il serait souhaitable :

- De réviser le modèle afin de prendre en considération la dynamique du stabilisateur vertical, qui n'est pas commandé par le pilote, et dont l'angle d'incidence fait partie des variables asservies.

Pour ce qui concerne la synthèse de la loi de commande d'hélicoptère, il pourrait être intéressant :

- D'explorer la conception du régulateur robuste statique de retour de sortie avec contraintes sur la matrice de retour.
- De considérer d'autres types de pondérations, également des matrices de pondérations avec termes croisés.

BIBLIOGRAPHIE

[ACAGF99] Alazard D., Cumel C., Apkarian P., Gauvrit M. et G. Ferreres **"Robustesse et Commande Optimale"**, Cépaduès - Éditions, France, 1999.

[ADS-33C] Anon **"Handling qualities for military rotorcraft"**, US Army Aviation Systems Command, ADS-33C, USA, Août, 1989.

[A-KHL06] Abu-Khalaf M., Huang J. and F.L. Lewis **"Nonlinear H_∞/H_2 Constrained Feedback Control"**, Springer-Verlag, England, 2006.

[Bal87] M.G. Balin **"Validation of a Real-Time Engineering Simulation of the UH-60A Helicopter"**, NASA TM-88360, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, California, USA, Fév. 1987.

[Bie06] R.L. Bielawa **"Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Mode Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity"**, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. and Blackwell Science Ltd., USA, 2nd ed., 2006.

[BGPB00] Bates D.G., Gatley S.L., Postlewaite I. and A.J. Berry **"Design and piloted simulation of robust integrated flight and propulsion controller"**, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No 2, pp. 269-277, 2000.

[Bou95] Boukas E.K., **"Systèmes asservis"**, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 1995.

[BP02] Bates D. and I. Postlewaite **"Robust Multivariable Control of Aerospace Systems"**, DUP Science, Netherlands, 2002.

- [Bra76] A.R.S. Bramwell **"Helicopter Dynamics"**, John Wiley & Sons, USA, 1976.
- [CH69] Cooper G.E., and R.P. Harper Jr. **"The Use of Pilot Ratings in the Evaluation of Aircraft Handling Qualities"**, NASA, TM D-5133, 1969.
- [Che89] R.T.N. Chen **"A Survey of Nonuniform Inflow Models for Rotorcraft Flight Dynamics and Control Applications"**, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, California, USA, 1989.
- [DFT92] Doyle J.C., Francis B.A. and A.R. Tannenbaum **"Feedback Control Theory"**, Macmillan, USA, 1992.
- [DGKF89] Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P. and B.A. Francis **"State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems"**, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No 9, Aug. 1989, pp. 831-847.
- [Dif88] M.A. Diftler **"UH-60A Helicopter Stability Augmentation Study"**, Fourteenth European Rotorcraft Forum, Milano, Italy, Sept. 1988.
- [DKM99] Dryfoos, J.B., Kothmann, B.D. and J. Mayo **"An approach to reducing rotor-body coupled-roll oscillations on the RAH-66 Comanche using modified roll rate feedback"**, 55th Annual forum of the American Helicopter Society, Montreal, Canada, Juin 1999.
- [Dre07] M.E. Dreier **"Introduction to Helicopter and Tiltrotor Flight Simulation"**, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. and Blackwell Science Ltd., USA, 2007.
- [FDF00] Frazzoli E., Dahleh M.A., and E. Feron **"Trajectory tracking control design for autonomous helicopters using a backstepping algorithm"**, The American Control Conference (Illinois, USA), 2000.

[GD88] Glover K. and J.C. Doyle "State-space formulae for stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity", *Systems and Control Letters*, Vol. 11, No 3, Sep. 1988, pp. 167-172.

[GPS98] Geromel J.C., Souza C.C. and R.E. Skelton "Static Output Feedback Controllers: Stability and Convexity", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No 1, Jan. 1998, pp. 120-125.

[HJLW79] Heffley R. K., Jewell W. F., Lehman J. M. and R. A. Van Winkle "A Compilation and Analysis of Handling Qualities Data – Volume I Data Compilation", NASA CR-3144, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, California, USA, Dec. 1979.

[Hor02] J. Horn "Rotor-state feedback in the design of flight control laws for a hovering helicopter", American Helicopter Society flight controls and crew systems technical specialists meeting, Philadelphia, PA, Oct. 2002.

[How81] J.J. Howlett "UH-60A Blackhawk Engineering Simulation Program – Volume II - Mathematical Model", NASA CR-166309, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, California, USA, Dec. 1981.

[HSM92] Hauser J., Sastry S., and G. Meyer "Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems : Applications to v/stol aircraft", *Automatica* 28, no. 4, 1992, pp. 651-670.

[HTLWR05] Horn J.F., Tolani D.K., Lagoa C.M., Wang Q. and A. Ray "Probabilistic robust control of rotorcraft", *Control Engineering Practice*, vol. 13, 2005, pp 1037 – 1046.

[Hyd95] R.A. Hyde " H_∞ Aerospace Control Design", Springer Verlag, 1995.

[IC92] Ingle S.J. and R Celi **"Effects of higher order dynamics on helicopter flight control law design"**, 48th Annual forum of the American Helicopter Society, Washington, DC, Juin 1992.

[Isi95] A. Isidori **"Nonlinear control systems"**, Springer Verlag, 1995.

[Jan07] J. Jantzen **"Fondation on Fuzzy Control"**, John Wiley & Sons, UK, Feb., 2007.

[JC91] Jensen P.T. and H.C. Curtis **"An Analytically Linearized Helicopter Model with Improved Modeling Accuracy"**, Interim Report, Princeton University, Aug. 1991.

[Joh77] W. Johnson **"Aeroelastic analysis for rotorcraft in flight or in a wind tunnel"**, NASA TN-D-8515, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, California, USA, Dec. 1977.

[Joh80] W. Johnson **"Helicopter Theory"**, Princeton University Press, USA, 1980.

[KCT93a] Kim F.D., Celi R and M.B. Tischler **"High-Order State Space Simulation Models of Helicopter Flight Mechanics"**, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 38, No. 4, Oct. 1993, pp. 16-27.

[KCT93b] Kim F.D., Celi R and M.B. Tischler **"Forward Flight Trim Calculation and Frequency Response Validation of a Helicopter Simulation Model"**, *Journal of Aircraft*, Vol. 30 (6) Nov.-Dec. 1993, pp. 155-168.

[KDDW89] Kaplita T.T., Driscoll J.T., Difter M.A. and S.W. Wong **"Helicopter Simulation Development by Correlation with Frequency Sweep Flight Test Data"**, American Helicopter Society 45th Annual Forum, Boston, MA. Mai, 1989, pp. 681-692.

[KHD99] Mahony R., Hamel T., and A. Dzul **"Hover control via approximate Lyapunov control for a model helicopter flatness based full authority helicopter control design"**, The Conference on Decision and Control (Phoenix, Arizona, USA), 1999, pp. 533-534.

[KHQ97] Kaloust J., Ham C., and Z. Qu **"Nonlinear autopilot control for a 2-dof helicopter model"**, *The IEEE Control Theory Appl*, vol. 144, 1997, pp. 612-616.

[KS99] Koo T. J. and S. Sastry **"Differential flatness based full authority helicopter control design"**, In the 38th Conference on Decision and Control (Phoenix, Arizona USA), 1999.

[KWM90] Kienitz K. Wu Q., and M. Mansour **"Robust Stabilization of Helicopter Model"**, Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, 1990 pp. 2607-2612.

[Mac89] J.M. Maciejowski **"Multivariable Feedback Design"**, Addison-Wesley JohnWiley & Sons, England, 1989.

[McFG92] McFarlane D. and K.Glover **"A Loop Shaping Design Procedure Using H_∞ Synthesis"**, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No6, June, 1992, pp. 759-769.

[Met03] B. Mettler **"Identification Modeling and Characteristics of Miniature Rotorcraft"**, Kluwer Academic Press, USA, 2003.

[MIL-STD-1797A] Hoh R.H., Mitchell D.G., David L. and C.L. Blanken **"Handling qualities for military rotorcraft"**, US Army Aviation Troop Command, MIL-STD-XXX, USA, 24 Nov., 1993.

[MTCRR90] Mansur M.H., Tischler M.B., Chaimovich M., Rosen A. and O. Rand **"Modeling Methods for High-Fidelity Rotorcraft Flight Mechanics Simulation"**, Sixteenth European Rotorcraft Forum, Glasgow, Scotland, Sept., 1990.

[Pad96] G.D. Padfield **"Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling"**, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. and Blackwell Science Ltd., UK, 1996.

[Par98] I. Paraschivoiu **"Aérodynamique subsonique"**, École Polytechnique, Montréal, Canada, 1998.

[PG00] Papageogiou G. and K. Glover **"Taking robust LPV control into flight on the VAAC Harrier"**, *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, 2000, pp. 4558-4564.

[PP81] PittD.M. and D. A. Peters **Theoretical Prediction of Dynamic Inflow Derivatives**, *Vertica*, vol. 5, 1981, pp. 21-34.

[PP04] Postlethwaite I. and E. Prempain **"Static H_∞ Loop Shaping Control of Fly-by-wire Helicopter"**, *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Dec, 2004, pp. 1188-1195.

[Prou86] R.W. Prouty **"Helicopter Performance Stability and Control"**, Krieger Publishing Company, USA, 1986.

[Rea78] J.S. Reaser **"Rotorcraft linear simulation model"**, NASA CR-152079, Vol. 1 Engineering Documentation, Vol 2 Computer Implementation, Vol 3 User's Manuel, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, California, USA, Dec. 1978.

[RR97] J.N. Rozak and A. Ray **"Robust Multivariable Control of Rotorcraft in Forward Flight"**, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 43, No. 3, 1997, pp. 149-160.

[SHHS98] Shim H., Hoo T., Hoffman F. and S. Sastry **"A comprehensive study of control design for an autonomous helicopter"**, In the 37th Conference on Decision and Control (Florida USA), 1998.

[SK84] Stepniewski W.Z. and C. N. Keys **"Rotary-Wing Aerodynamics"**, Dover Publications Inc., USA, 1984.

[SL03] Stevens B.L. and F.L. Lewis **"Aircraft control and simulation"**, 2nd ed. John Wiley & Sons, USA, 2003.

[SP05] Skogestad S. and I. Postlethwaite **"Multivariable Feedback Control"**, John Wiley & Sons, England, 2005.

[SPWSHHGB98] Smerlas A., Postlethwaite I., Walker D.J., Strange M.E., Howitt J. Horton R.I. Gubbel A.W. and S.W. Baillie **"Design and flight testing of an H_∞ controller for the NRC Bell205 experimental fly-by-wire helicopter"**, *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, AIAA 98-4300, 1998.

[S-RZA94] Sira-Ramirez H., Zribi M, and S. Ahmed **"Dynamical sliding mode control approach for vertical flight regulation in helicopters"**, *The IEEE Control Theory Application*, vol. 141, 1994, pp. 19-24.

[Tak90] M.D. Takahashi **"A Flight-Dynamic Helicopter Mathematical Model with a Single Flap-Lag-Torsion Main Rotor"**, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, California, USA, Technical Memorandum 102267, Feb., 1990.

[Tak94] M.D. Takahashi **"Rotor-state feedback for high bandwidth control and structural load limiting"**, *Journal of the American Helicopter Society*, 39(1), 1994, pp.50–61.

[Tis96a] Tischler, M.(ed.) **"Advances in Aircraft Flight Control"**, Taylor & Francis, London, UK, 1996.

[TM96] TM 1-1520-237-10 **"Technical Manuel, Operator's Manual for UH-60A Helicopter, UH-60L Helicopter, EUH-60A Helicopter"**, Headquarters, Department of the Army, USA, october 1996.

[TR07] M.E. Dreier **"Aircraft and Rotorcraft System Identification"**, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. and Blackwell Science Ltd., USA, 2007.

[TTDC82] Talbot P.D., Tinling B.E., Decker W.A., and T.N.R. Chen **"A Mathematical Model of Single Main Rotor Helicopter for Piloted Simulation"**, National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, California, USA, Technical Memorandum 84281, 1982.

[Vyd85] M. Vidyasagar **"Control System Synthesis: A Factorization Approach"**, M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1985.

[Vyd88] M. Vidyasagar **"Normalized coprime factorizations for non-strictly proper systems"**, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, No3, March, 1988, pp. 300-301.

[Wat04] J. Watkinson **"The Art of the Helicopter"**, Elsevier Butterworth-Heinemann, UK, 2004.

[WP96] Walker D.J and I. Postlethwaite **"Advanced Helicopter Flight Control Using Two-Degree-of-Freedom H_∞ optimization"**, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 19, No2, Mar-Apr, 1996, pp. 461-468.

[www01] http://www.centennialofflight.gov/essay/Dictionary/heli_rotor_config/DI54.htm

[www02] <http://avdil.gtri.gatech.edu/AUVS/IARCLaunchPoint.html>

[YP90] Yue A. and I. Postlethwaite **"Improvement of helicopter handling qualities using H_∞ optimisation"**, IEE Proceedings – D Control Theory and Applications Vol. 137, No3, May, 1990, pp. 115-129.

[ZDG96] Zhou K., Doyle J.C. and K. Glover **"Robust and optimal control"**, Prentice Hall, USA, 1996.

[ZD98] Zhou K. and J.C. Doyle **"Essentials of robust control"**, Prentice Hall, USA, 1998.

ANNEXE A : DÉFINITIONS

Dans cette annexe sont présentées les définitions de certaines notions utilisées dans le texte.

Définition A.1 (Système propre et strictement propre) [DFT92] : On dit qu'un système est **propre**, si le degré de son numérateur est inférieur à celui de son dénominateur ($m \leq n$). On dit qu'un système est **strictement propre**, si le degré de son numérateur est strictement inférieur à celui de son dénominateur ($m < n$). Autrement dit, $G(s)$ est **propre** si $|G(j\infty)| < \infty$ et **strictement propre** si $|G(j\infty)| = 0$.

Définition A.2 (Norme H_2) [DFT92] : Soit un système linéaire stationnaire de matrice de transfert $G(s)$. On définit la **norme H_2** comme :

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace}(G^*(j\omega)G(j\omega)) d\omega \right)} = \sup_{U(s) \in \mathbb{RH}_\infty} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_\infty} \quad (\text{A.1})$$

où l'indice $()^*$ désigne la matrice conjuguée. On appelle \mathbb{RH}_∞ l'espace des fonctions $X(s)$, analytiques dans $\text{Re}(s) \geq 0$, telles que la norme H_∞ est $\|X(s)\|_\infty < \infty$.

Interprétation : c'est l'énergie en sortie du système lorsqu'on injecte une impulsion unitaire en entrée (cas mono-entrée / mono-sortie *SISO*) ou plus généralement un bruit blanc, vérifiant $U(j\omega)U^*(j\omega)$ (densité spectrale uniforme).

Définition A.3 (Norme H_∞) [DFT92] : Soit un système linéaire stationnaire de matrice de transfert $G(s)$. On définit la **norme** H_∞ comme :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{U(s) \in \mathbb{RH}_2} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} \quad (\text{A.2})$$

On appelle \mathbb{RH}_2 l'espace des fonctions $X(s)$, analytiques dans $\text{Re}(s) \geq 0$, de carré sommable (espace de Hilbert).

Interprétation : c'est la norme induite par la norme des fonctions de H_2 . Elle mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle $G(j\omega)$ (le pic dans le lieu de Bode).

La norme H_2 est finie si et seulement si $G(s)$ est strictement propre et n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire; la norme H_∞ est finie si et seulement si $G(s)$ est strictement propre et n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire (pour justification voir [DFT92] p.16).

Définition A.4 (Valeurs propres) [ZDG96] : Soit une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors les **valeurs propres** de (A) , notées $\lambda_i(A)$, sont les racines de l'équation **caractéristique** $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Définition A.5 (Vecteurs propres) [ZDG96] : Le **vecteur propre à droite** de (A) $v_i \in \mathbb{R}^n$, associés à la valeur propre $\lambda_i(A)$, est tel que $A v_i = \lambda_i v_i$.

Le **vecteur propre à gauche** de (A) $u_i \in \mathbb{R}^n$, associés à la valeur propre $\lambda_i(A)$, est tel que $u_i^T A = u_i^T \lambda_i$, où l'indice $(\)^T$ désigne la matrice transposée.

Définition A.6 (Valeurs singulières) [ZDG96] : Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ une matrice complexe.

Le gain de la matrice (A) peut être défini par le rapport $\frac{\|A.x\|_2}{\|x\|_2}$, ou le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. On peut déduire facilement que le gain de la matrice (A) dépend de la direction du vecteur (x) . Pour toute matrice (A) , il existe $U_\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times m}$ et $V_\Sigma \in \mathbb{C}^{n \times n}$, deux matrices unitaires (c.-à-d. $U_\Sigma^* U_\Sigma = I_m$; $V_\Sigma^* V_\Sigma = I_n$), telles que :

$$A = U_\Sigma \Sigma V_\Sigma^*; \quad \begin{array}{l} \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0^{m \times (n-m)}) \quad n > m \\ \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0^{(m-n) \times n}) \quad n < m \end{array}; \quad \begin{array}{l} \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \sigma_i \geq 0 \end{array} \quad (\text{A.3})$$

Les **valeurs singulières** de (A) sont les racines carrées des valeurs propres de $(A^* A)$:

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^* A)} \quad m \geq n \quad ; \quad \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A A^*)} \quad m < n \quad (\text{A.4})$$

où $(\)^*$ est la matrice conjuguée transposée et $\lambda_i(\)$ est la i -ème valeur propre. En général, on les ordonne comme suit :

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_i(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A) \quad (\text{A.5})$$

Ainsi $\sigma_1(A) = \bar{\sigma}(A)$ est la plus grande **valeur singulière** et $\sigma_n(A) = \underline{\sigma}(A)$ est la plus petite **valeur singulière**. Si $(x = v_1 ; V_\Sigma = [v_1, v_2, \dots, v_n])$, alors "l'amplification" maximale de la matrice (A) sera $\bar{\sigma}(A)$ dans la direction $(u_1 ; U_\Sigma = [u_1, u_2, \dots, u_m])$. De manière similaire :

$$A v_i = \sigma_i(A) u_i \quad (\text{A.6})$$

Alors les valeurs propres sont liées aux directions invariantes par la transformation linéaire associé à (A) , tandis que les **valeurs singulières** contiennent l'information "métrique" de cette transformation. Plus précisément, la boule unité de \mathbb{R}^n est transformé en un hyper ellipsoïde et les **valeurs singulières** correspondent aux demi – longueurs des principaux axes de cet ellipsoïde.

Définition A.7 (Nombre conditionnel) [SP05] : Si on définit le **nombre conditionnel** de (A) comme :

$$\kappa(A) = \frac{\bar{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)} \quad (\text{A.7})$$

La matrice mal conditionnée aura une valeur importante du **nombre conditionnel**, tandis qu'une matrice "ronde" aura $(\kappa \approx 1)$.

Définition A.8 (Forme de Schur) [ACAGF99] : Toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ peut se décomposer sous la forme :

$$A = U_{\perp}^* \Lambda U_{\perp} \quad (\text{A.8})$$

où (U_{\perp}) est unitaire et (Λ) est triangulaire supérieure. Les éléments diagonaux de (Λ) sont les valeurs propres de (A) .

Définition A.9 (Équations de Riccati) [ACAGF99] : Pierre angulaire des problèmes de commande avec coût quadratique, l'équation de Riccati standard est de la forme :

$$A^T X + X A - X B B^T X + Q = 0_{n \times n} \quad (\text{A.9})$$

où $(Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \geq 0)$ est symétrique $(Q^T = Q)$, $(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$ et l'inconnue est une matrice $(X \in \mathbb{R}^{n \times n})$ que l'on souhaite symétrique. Sous réserve d'existence, il n'y a

pas en général unicité de solutions (X) . Pour les applications à l'automatique, on s'intéresse à l'unique solution stabilisante $(X^+ \geq 0)$, c'est-à-dire les valeurs propres de $\underbrace{\left(A - B \overbrace{B^T X^+}^K \right)}_{A_{cl}}$ soient toutes dans le demi plan complexe ouvert gauche (\mathbb{C}_-) . La résolution de l'équation algébrique matricielle de Riccati (A.9) fait intervenir le sous-espace propre stable de la matrice Hamiltonienne :

$$H = \begin{bmatrix} A & -B B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (\text{A.10})$$

Le spectre de cette matrice a la propriété d'être symétrique par rapport à l'axe imaginaire. Le **sous-espace propre stable** de (H) est le sous-espace des vecteurs propres associés aux valeurs propres stables. On les calcule par la décomposition de Schur de (H) . Si $\begin{bmatrix} Y_{\#} \\ Z_{\#} \end{bmatrix}$ est une base orthonormée de ce sous-espace, l'équation (A.9) a une solution stabilisante si et seulement si

- le Hamiltonienne (H) (A.10) n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, alors $(Y_{\#}, Z_{\#} \in \mathbb{R}^{n \times n})$;
- la matrice $(Y_{\#})$ est inversible.

Cette solution est alors symétrique et obtenue comme :

$$X^+ = Z_{\#} Y_{\#}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

On peut s'en convaincre directement à partir de l'équation (A.12) :

$$H \begin{bmatrix} Y_{\#} \\ Z_{\#} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\#} \\ Z_{\#} \end{bmatrix} \Lambda \quad \text{Re}(\Lambda) \in \mathbb{C}_- \quad (\text{A.12})$$

qui traduit que $\begin{bmatrix} Y_{\#} \\ Z_{\#} \end{bmatrix}$ est le sous-espace invariant stable de (H) . A noter que (A.12) donne $A - B B^T Z_{\#} Y_{\#}^{-1} = Y_{\#} \Lambda Y_{\#}^{-1}$ et cette matrice est donc stable. On notera aussi l'identité :

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \\ X^+ & I_n \end{bmatrix}^{-1} H \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \\ X^+ & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B B^T X^+ & -B B^T \\ 0_{n \times n} & -(A^T - B B^T X^+) \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Définition A.10 (Factorisation en éléments premiers) [SP05] : Soit un système avec une fonction/matrice de transfert $G(s)$, alors une **factorisation en éléments premiers à droite** a la forme :

$$G(s) = N_r(s) M_r^{-1}(s) \quad (\text{A.14})$$

où $N_r(s)$ et $M_r(s)$ sont stables et premiers entre eux. La stabilité implique que $N_r(s)$ inclut tous les zéros ($\in \bar{\mathbb{C}}_+$) du système, alors que $M_r(s)$ inclut, comme zéros, tous les pôles ($\in \bar{\mathbb{C}}_+$) du système. La factorisation en éléments premiers implique qu'il n'y a pas de zéros communs ($\in \bar{\mathbb{C}}_+$) entre $N_r(s)$ et $M_r(s)$, qui peuvent entraîner une simplification, lorsque le produit $N_r(s) M_r^{-1}(s)$ est formé. Mathématiquement, selon l'identité de Bezout, il existe deux fonctions stables, $U_r(s) \in \mathbb{C}^{q \times p}$ et $V_r(s) \in \mathbb{C}^{q \times p}$ telles que :

$$U_r(s) N_r(s) + V_r(s) M_r(s) = I_q, \forall s \quad (\text{A.15})$$

Soit $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \Rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ une réalisation interne (dans l'espace d'état) minimale (les paires (A, B) et (A, C) sont respectivement commandable et

observable), alors une factorisation en éléments premiers à gauche est donnée par Vidyasagar dans [Vyd85], [Vyd88] :

$$[N_l(s), M_l(s)] \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} A + H_l C & B + H_l D \\ R_l^{-\frac{1}{2}} C & R_l^{-\frac{1}{2}} D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A + H_l C & H_l \\ R_l^{-\frac{1}{2}} C & R_l^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \right] \quad (A.16)$$

$$R_l = I_p + D D^T \quad S_l = I_q + D^T D \quad H_l = -(B D^T + Z_l C^T) R_l^{-1} \quad D \in \mathbb{R}^{p \times q}$$

où Z_l est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$\left(\underbrace{A - B S_l^{-1} D^T C}_{A_l} \right) Z_l + Z_l \left(\underbrace{A - B S_l^{-1} D^T C}_{A_l} \right)^T - Z C^T R_l^{-1} C Z + \underbrace{B S_l^{-1} B^T}_{Q_l} = 0_{n \times n} \quad (A.17)$$

Le script MATLAB est :

>>[X, eigCL, Acl] = care(AI',C',Ql,Rl);

Définition A.11 (Produit de deux réalisations minimales) [ACAGF99] : Soit

$G_1(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$ et $G_2(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$ deux réalisations minimales, alors le produit :

$$G_1(s) G_2(s) \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0_{n_2 \times n_1} & A_2 \\ C_1 & D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \\ D_1 D \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} A_2 & 0_{n_2 \times n_1} \\ B_1 C_2 & A_1 \\ D_1 C_2 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 D_2 \\ D_1 D_2 \end{bmatrix} \right\| \quad (A.18)$$

Définition A.12 (Marge de gain) [Bou95] : Mathématiquement, pour un système mono-entrée/momo-sortie (SISO) dont la fonction de transfert est $G(s)$, si on désigne par (ω_{ph}) la fréquence à laquelle la phase $\angle G(j\omega)$ est égal à $(-\pi)$, la marge de gain est donnée par:

$$\text{Marge de Gain} = \frac{1}{|G(j\omega_{ph})|} \quad (\text{A.19})$$

Définition A.13 (Marge de phase) [Bou95] : *Pour un système mono-entrée/mono-sortie (SISO) dont la fonction de transfert est $G(s)$, si on désigne par (ω_c) la fréquence de coupure $|G(j\omega_c)| = 1$, la **marge de phase** est donnée par:*

$$\text{Marge de Phase} = \pi + \angle G(j\omega_c) \quad (\text{A.20})$$

ANNEXE B : CALCUL DES NORMES H_2 ET H_∞

On rappelle ici les algorithmes pour calculer les normes H_2 et H_∞ d'un système défini dans l'espace d'état $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times q}$. Soit

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \quad (\text{B.1})$$

avec $(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$ matrice d'évolution, $(B \in \mathbb{R}^{n \times q})$ matrice de commande, $(C \in \mathbb{R}^{p \times n})$ matrice de sortie et $(D \in \mathbb{R}^{p \times q})$ matrice d'action directe. Pour la norme H_2 , on suppose que la matrice d'évolution (A) est stable et que la matrice d'action directe (D) est nulle. En remarquant que $G(j\omega)$ est la transformée de Fourier de $\mathcal{L}^{-1}\{C(sI_n - A)^{-1}B\} = Ce^{At}B$, l'identité de Parseval donne :

$$\int_0^{+\infty} (Ce^{At}B)^T Ce^{At}B dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(j\omega)G(j\omega) d\omega \quad (\text{B.2})$$

Soit \mathcal{O} le grammien d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \int_0^{+\infty} (Ce^{At})^T Ce^{At} dt = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (\text{B.3})$$

On montre [ZD98] que le grammien d'observabilité \mathcal{O} est la solution de l'équation de Lyapunov (B.4) :

$$A^T \mathcal{O} + \mathcal{O}A + C^T C = 0 \quad (\text{B.4})$$

En prenant la trace de chaque membre de l'expression (B.2), on obtient :

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{Trace}(B^T \mathcal{O} B)} \quad (\text{B.5})$$

À noter qu'on a aussi [ZD98] :

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{Trace}(C\mathcal{C}C^T)} \quad (\text{B.6})$$

où (\mathcal{C}) est le grammien de commandabilité (B.7) et est la solution de (B.8) :

$$\mathcal{C} = \int_0^{+\infty} e^{At} B (e^{At} B)^T dt = \int_0^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (\text{B.7})$$

$$A\mathcal{C} + \mathcal{C}A^T + B B^T = 0_{n \times n} \quad (\text{B.8})$$

Si $G(s)$ est une fonction de transfert, la norme H_2 peut être calculée par la racine carrée de la somme des résidus de $G(-s)G(s)$ aux pôles stables :

$$\|G\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{i \\ \text{Re}(p_i) < 0}} (s - p_i) G(-s) G(s)} \Big|_{s=p_i} \quad (\text{B.9})$$

Théorème B.1 [ZDG96] : Considérons $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, comme réalisation interne

dans l'espace d'état de $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times q}$. On a toujours $\|G\|_\infty > \bar{\sigma}(D)$ et pour tout $\gamma > \bar{\sigma}(D)$ il y a une équivalence entre :

$$\text{TB.1.a.} \quad \|G\|_\infty < \gamma;$$

TB.1.b. La matrice $H(\gamma)$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. :

$$H(\gamma) = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & B \\ C^T & 0_{n \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma I_p & D \\ D^T & \gamma I_q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0_{p \times n} \\ 0_{q \times n} & -B^T \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

De plus, si $(j\omega_\#)$ est une valeur propre de $H(\gamma)$ pour $\gamma > \bar{\sigma}(D)$, alors $\bar{\sigma}(G(j\omega_\#)) = \gamma$, c'est-à-dire le gain (γ) est obtenu à la fréquence $(\omega_\#)$.

La matrice $H(\gamma)$ est d'une structure particulière, dite "Hamiltonienne". Lorsque $(D=0)$ elle s'écrit simplement $H(\gamma) = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-1} B B^T \\ -\gamma^{-1} C^T C & -A^T \end{bmatrix}$. Cette caractéristique suggère un algorithme pour calculer la norme H_∞ . On part d'un encadrement grossier $[\gamma_{\min} \quad \gamma_{\max}]$ de cette norme et on l'améliore itérativement par la méthode de bisection :

- On calcule le spectre de $H(\gamma)$ pour $\gamma = \frac{\gamma_{\min} + \gamma_{\max}}{2}$;
- S'il n'y a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, (γ) est trop grand et l'on obtient comme nouvel encadrement $[\gamma_{\min} \quad \gamma]$;
- Sinon, (γ) est trop petit et l'on obtient comme nouvel encadrement $[\gamma \quad \gamma_{\max}]$.

ANNEXE C : RÉSOLUTION DU PROBLÈME H_∞

Dans cette annexe nous examinons la résolution, ainsi que la mise en forme du problème H_∞ . Nous décrivons également les principaux algorithmes dans le cadre de la synthèse de la commande robuste H_∞ .

C.1 Théorème des petits gains

D'une manière générale, deux types de perturbations peuvent affecter le système nominal :

- Signaux perturbateurs (signaux auxiliaires non prévisibles, c'est-à-dire bruits de mesure, bruits de commande);
- Incertitude sur le modèle du système lui-même $\Delta G(s)$ et/ou la commande $\Delta K(s)$.

Ces dernières sont elles même de deux types :

- Non-structurées (c'est-à-dire dynamique négligée, dont seulement une borne est connue);
- Structurées (c'est-à-dire incertitude de type paramétrique).

Étant donné que la stabilité en boucle fermée est sensible aux erreurs de modélisation et aux dérives de commande $\Delta K(s)$, assurer la stabilité du modèle nominal bouclé n'est donc pas suffisant. Il faut également garantir la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations $\Delta G(s)$ et $\Delta K(s)$ admissibles, parmi lesquelles se trouvent le système réel lui-même. La stabilité est dite "robuste", lorsque cette garantie est fournie.

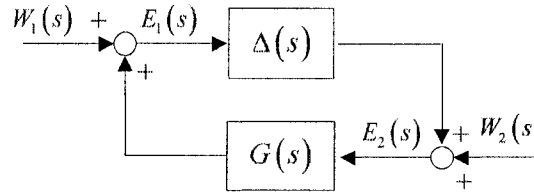


Figure C.1 Analyse de la stabilité pour la boucle ouverte $L(s) = G(s)\Delta(s)$

Le théorème des petits gains donne une autre formulation du problème de la synthèse H_∞ , défini dans la section 3.2. Si on se restreint à des incertitudes non structurées $\Delta G(s)$ et $\Delta K(s)$, le résultat du théorème des petits gains donne un instrument didactique très important pour la stabilité robuste.

Théorème C.1 (Théorème des petits gains) [ZDG96] : Considérons la boucle d'asservissement de la figure C.1, où $G(s)$ est un système linéaire stationnaire (LTI) stable et propre $G(s) \in \mathbb{RH}_\infty$ et l'incertitude non-structurée $\Delta(s)$ est un opérateur, vérifiant :

$$\|\Delta(s)\|_\infty \leq \gamma_{Tpg}^{-1} ; \gamma_{Tpg} \geq 1 \quad (C.1)$$

Supposons que la boucle ouverte du système $L(s) = G(s)\Delta(s)$ ne présente pas de simplification de mode instable. Alors le système bouclé ci-dessus est stable de manière interne pour toute incertitude $\Delta(s) \in \mathbb{RH}_\infty$, si et seulement

$$\text{si} \quad \|G(j\omega)\|_\infty < \gamma_{Tpg}, \quad \forall \omega \quad (C.2)$$

(Pour la justification, voir [ZDG96]).

Remarque : Soit le système bouclé (par ex. figure C.1). Alors le système est dit stable de manière interne ($\in \mathbb{RH}_\infty$), si toutes les fonctions de transfert qui relient les entrées ($W_1(s)$ et $W_2(s)$) aux sorties ($E_1(s)$ et $E_2(s)$) sont stables

De fait $\left(\frac{1}{\gamma_{Tpg}}\right)$ définit l'amplitude maximale des incertitudes non-structurées $\Delta(s)$ que peut subir le système bouclé $F_l(P, K)$, expression (3.2) (voir chapitre 3), sans se déstabiliser. Donc, en minimisant la norme $\|F_l(P, K)\|_\infty$, expression (3.3), **le problème H_∞ optimal** consiste à trouver une loi de commande $K(s)$, de sorte que le système bouclé soit le plus robuste possible vis-à-vis d'incertitudes non-structurées. Lorsque les incertitudes sont structurées, la norme $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma_{Tpg}$ est une contrainte trop forte, étant donné que les fréquences pour lesquelles le système bouclé $F_l(P, K)$ et l'incertitude $\Delta(s)$ trouvent leur norme H_∞ , sont principalement différentes.

C.2 Résolution du problème H_∞ normalisé.

Introduiront les techniques de résolution par variables d'état du problème de H_∞ normalisé. L'approche H_∞ a été proposée par Glover et Doyle dans [GD88] et Doyle et al. dans [DGKF89]. Les algorithmes développés sont disponibles dans la boîte à outil ROBUST CONTROL TOOLBOX de MATLAB (fonction **hynfsyn**). La paramétrisation du problème sous-optimal est basée sur la résolution de deux équations de Riccati. Le problème optimal est généralement résolu en utilisant la méthode de bisection, c'est-à-dire la valeur de γ_{opt} est habituellement approximée avec l'expression (B.10) (voir annexe B) pour des valeurs de plus en plus petites (γ -itération). Introduisons une réalisation minimale du système $P(s)$, représenté avec notre propre notation $\left\| \begin{bmatrix} \cdot & [\cdot] \\ [\cdot] & [\cdot] \end{bmatrix} \right\|$:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI_n - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

Cette réalisation est associée à la description interne (C.4), dont le vecteur d'état est, x , le vecteur de sortie est formé de deux vecteurs $\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$, on supposera que $D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}$ et $D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$ avec $m_1 \geq p_2$ et $p_1 \geq m_2$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ou, n , est l'ordre du système.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \\ D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \end{cases} ; x(0) = 0 \quad (\text{C.4})$$

La solution par variable d'état est applicable sous les suppositions suivantes :

SC.1. Les paires (A, B_2) et (A, C_2) sont respectivement stabilisable et détectable. Cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence du compensateur qui stabilise le système de manière interne;

SC.2. Les matrices D_{12} et D_{21} sont de plein rang ;

$$\text{SC.3. } \begin{aligned} & \text{rang} \begin{pmatrix} j\omega I_n - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2 \\ & \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R} . \text{ Autrement dit,} \\ & \text{rang} \begin{pmatrix} j\omega I_n - A & B_1 \\ -C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2 \end{aligned}$$

$P_{12}(s)$ et $P_{21}(s)$ n'ont pas de zéro sur l'axe imaginaire. Ces deux dernières hypothèses sont appelées **hypothèses de régularité**. Elles assurent que le compensateur optimal ne simplifie pas de zéro – pôle instable sur l'axe imaginaire. Dans un premier temps, nous ferons en plus les hypothèses simplificatrices dites de **normalisation**.

$$\text{SC.4. } D_{12}^T \begin{bmatrix} D_{12} & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m_2} & 0_{m_2 \times n} \end{bmatrix} \text{ et } D_{21} \begin{bmatrix} D_{21}^T & B_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{p_2} & 0_{p_2 \times n} \end{bmatrix}$$

SC.5. $D_{22} = 0_{p_2 \times m_2}$ et $D_{11} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix}$ est portionnée de manière que $D_{1122} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_2}$. La supposition $D_{22} = 0_{p_2 \times m_2}$ est raisonnable, vue que la plus part des procédés industrielles sont strictement propres.

Remarque : Pour compléter le développement, nous présenterons le cas pour $D_{22} \neq 0_{p_2 \times m_2}$ dans la section C.2.1. On peut toujours satisfaire les suppositions SC.4-SC.5 par des changements appropriés de variables.

On a la caractérisation suivante des valeurs sous – optimales du problème $\|F_l(P, K)\|_\infty$ normalisé.

Théorème C.2 [ZDG96] : Sous les hypothèses SC.1-SC.5, il existe un compensateur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure :

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

si et seulement si :

TC.2.a.

$$\gamma > \max\left(\bar{\sigma}\begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \end{bmatrix}, \bar{\sigma}\begin{bmatrix} D_{1111}^T & D_{1121}^T \end{bmatrix}\right) \quad (C.5)$$

TC.2.b. Les équations de Riccati :

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0_{n \times n} \quad (C.6)$$

$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y + B_1 B_1^T = 0_{n \times n} \quad (C.7)$$

ont des solutions stabilisantes respectivement X_∞ et Y_∞ telles que :

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left(A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty \right) < 0, \quad \forall i \quad (C.8)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left(A + Y_\infty \left(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \right) \right) < 0, \forall i \quad (\text{C.9})$$

TC.2.c. Ces solutions et le rayon spectral $\rho(X_\infty Y_\infty)$ vérifient :

$$X_\infty \geq 0 \quad Y_\infty \geq 0 \quad \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (\text{C.10})$$

TC.2.d. Lorsque les conditions TC.2.a-c sont satisfaites, l'ensemble $K(s)$ des compensateurs rationnels et stabilisant de manière interne le système $P(s)$, satisfaisant $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$, est donné par la transformation linéaire fractionnelle $K(s) = F_l(K_\infty, \Phi)$, pour tout stable et propre $\Phi(s) \in \mathbb{RH}_\infty$ de norme $\|\Phi\|_\infty < \gamma$.

$$K_\infty = \begin{bmatrix} [A_\infty] & [Z_\infty Y_\infty C_2^T \quad Z_\infty B_2] \\ \begin{bmatrix} -B_2^T X_\infty \\ -C_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{m_2 \times p_2} & I_{m_2 \times m_2} \\ I_{p_2 \times p_2} & 0_{p_2 \times m_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (\text{C.11})$$

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 B_2^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_2^T C_2$$

Cette solution particulière du problème H_∞ sous-optimal est appelée **compensateur central** (en anglais *central controller*). Nous pouvons faire deux remarques sur la solution particulière, donnée au théorème **Théorème C.2** : d'abord le correcteur obtenu est strictement propre et a le même ordre que le système (C.3), qui représente le système à réguler – l'hélicoptère dans notre cas, augmenté de différentes fonctions de pondération. Ensuite, si l'optimum est caractérisé par le rayon spectral $\rho(X_\infty Y_\infty) = \gamma_{opt}^2$, les formules deviennent singulières au voisinage de γ_{opt} , c'est-à-dire que Z_∞ n'est plus inversible à l'optimum. Cependant, on montre que le compensateur dynamique $K_{\omega_{11}}$ (C.12) tend alors vers un compensateur d'ordre réduit, la chute d'ordre étant égale à la

chute de rang de $(I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)$. Cette réduction d'ordre provient de la simplification de pôle(s) à l'infini [ACAGF99].

$$K_{\sigma_{11}} = -B_2^T X_\infty (sI_n - A_\infty)^{-1} (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y_\infty C_2^T \quad (C.12)$$

Le **compensateur central** peut être séparé en estimateur (observateur) d'état de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = \left(A + \underbrace{B_1 \gamma^{-2} B_1^T X_\infty}_{\hat{w}_{worst}} \right) \hat{x} + B_2 u - (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y_\infty C_2^T (C_2 \hat{x} - y) \quad (C.13)$$

et retour d'état (C.14):

$$u(t) = -B_2^T X_\infty \hat{x}(t) \quad (C.14)$$

En comparant la structure du compensateur central (figure C.2) avec la structure d'un estimateur (observateur) classique d'état (filtre de Kalman), nous pouvons constater que l'expression (C.13) contient un terme $\hat{w}_{worst} = B_1 \gamma^{-2} B_1^T X_\infty$ qui peut être vu comme l'estimation de la pire perturbation extérieure [SP05].

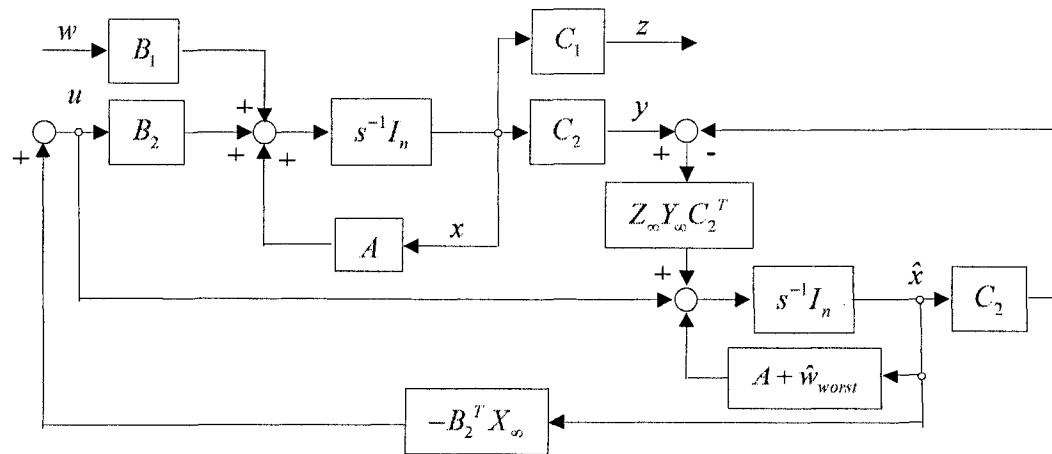


Figure C.2 Structure du compensateur central (avec observateur et retour d'état)

Le **Théorème C.2** suggère un algorithme, permettant d'approcher le gain optimal γ_{opt} et d'obtenir ainsi un correcteur proche du compensateur optimal du problème standard. Cet algorithme est connu sous le nom de γ -itération. En utilisant la méthode de bisection, on initialise le processus avec un intervalle $[\gamma_{min} \quad \gamma_{max}]$ (souvent $[0,1 \quad 10]$) contenant γ_{opt} et à chaque itération, on élimine une moitié de cet intervalle en testant les conditions TC.2.b et TC.2.c au point médian :

$$\gamma = \frac{\gamma_{max} + \gamma_{min}}{2} \quad (C.15)$$

Si elles sont satisfaites, on a $\gamma > \gamma_{opt}$ et on rejette la moitié droite de l'intervalle. Sinon, on élimine la moitié gauche. Ce schéma itératif s'arrête lorsque la longueur de l'intervalle tombe en-dessous de la précision désirée pour γ_{opt} . À chaque itération, "tester" la valeur de γ exige :

Étape 1 : Calculer le spectre des matrices Hamiltoniennes :

$$\begin{aligned} F_{\infty} &= \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,n \times 2,n} \\ J_{\infty} &= \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,n \times 2,n} \end{aligned} \quad (C.16)$$

associées aux équations de Riccati (C.6) et (C.7). Si les spectres contiennent des valeurs imaginaires pures, conclure que $\gamma < \gamma_{opt}$ et passer à l'itération suivante.

Étape 2 : Calculer les sous-espaces invariants stables :

$$\begin{bmatrix} Y_F \\ Z_F \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} Y_J \\ Z_J \end{bmatrix} \quad (C.17)$$

de F_∞ et J_∞ respectivement. Si (Y_F) ou (Y_J) est singulière, conclure que $\gamma < \gamma_{opt}$ et passer à l'itération suivante. Sinon, calculer les solutions stabilisantes des équations de Riccati :

$$X_\infty = Z_F Y_F^{-1} \quad \text{et} \quad Y_\infty = Z_J Y_J^{-1} \quad (\text{C.18})$$

Étape 3 : Tester la condition TC.2.c pour conclure sur la position de γ , par rapport au γ_{opt} .

En général l'optimum est caractérisé par l'égalité de la plus grande valeur propre du produit $X_\infty Y_\infty$ avec (γ_{opt}^2) .

$$\rho(X_\infty Y_\infty) = \gamma_{opt}^2 \quad (\text{C.19})$$

Cet algorithme est programmé dans la boîte à outil ROBUST CONTROL TOOLBOX de MATLAB (fonction **hynfopt**).

C.2.1 Le cas $D_{22} \neq 0_{p_2 \times m_2}$

Lorsqu'il existe un chemin direct entre la commande u et la sortie mesurée, la matrice $D_{22} \neq 0_{p_2 \times m_2}$. Cependant, le terme D_{22} peut être séparé du système selon figure C.3 :

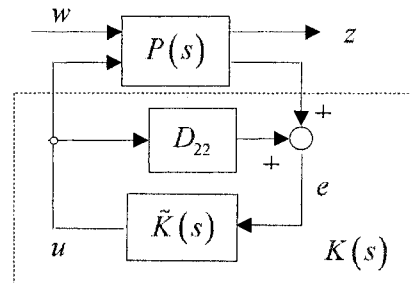


Figure C.3 Le cas $D_{22} \neq 0_{p_2 \times m_2}$

En premier, on peut faire la synthèse d'un compensateur $K(s)$ avec $D_{22} = 0_{p_2 \times m_2}$ en ensuite calculer le compensateur $\tilde{K}(s)$ comme :

$$\tilde{K}(s) = K(s) \left(I_{p_2} + D_{22} K(s) \right)^{-1} \quad (\text{C.20})$$

Nous allons maintenant voir comment obtenir le système augmenté $P(s)$ en ajoutant des pondérations sur les signaux à surveiller, et comment choisir ces signaux et pondérations : c'est l'objet des paragraphes suivants, où nous choisissons de traiter le problème de la sensibilité mixte.

C.3 Mise en forme du problème H_∞

Comme nous l'avons présenté dans la section 3.2, la synthèse H_∞ s'applique à des représentations du type LFT (Transformations Linéaires Fractionnelles) selon la figure 3.1. Le problème est maintenant de savoir comment obtenir ce type de représentation à partir du système, qui est l'hélicoptère et des pondérations que l'on va lui ajouter, liées à des critères de stabilité et de performance. Le libre choix des signaux à surveiller, ainsi que des pondérations, qui dépendent des objectifs de performance, rend la synthèse H_∞ souple.

C.3.1 Système augmenté

Si on se réfère à la figure 3.2, le système dit "augmenté", élaboré à partir du système nominal $G(s)$ et des fonctions de pondération $W_e(s) \in \mathbb{C}^{m_1 \times m_1}$, $W_u(s) \in \mathbb{C}^{m_2 \times m_2}$ et $W_3(s) \in \mathbb{C}^{p \times p}$, est donné par la matrice de transfert (C.21) :

$$P(s) = \left\| \begin{bmatrix} W_e(s)Q^{-1}(s) \\ 0_{m_2 \times m_1} \\ 0_{p \times m_1} \\ Q^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_e(s)G(s) \\ W_u(s) \\ W_3(s)G(s) \\ -G(s) \end{bmatrix} \right\| \quad (C.21)$$

Si la fonction de transfert $Q(s) \in \mathbb{C}^{m_1 \times p}$ possédant une réalisation interne minimale

$$Q(s) = C_Q (sI_{n_Q} - A_Q)^{-1} B_Q + D_Q \Rightarrow \begin{bmatrix} A_Q & B_Q \\ C_Q & D_Q \end{bmatrix} \text{ est inversible } (D_Q \text{ est inversible}), \text{ alors}$$

une réalisation minimale de $Q^{-1}(s)$ est :

$$Q^{-1}(s) \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} \underbrace{A_Q - B_Q D_Q^{-1} C_Q}_{A_{Q^{-1}}} & \underbrace{B_Q D_Q^{-1}}_{B_{Q^{-1}}} \\ \underbrace{-D_Q^{-1} C_Q}_{C_{Q^{-1}}} & \underbrace{D_Q^{-1}}_{D_{Q^{-1}}} \end{bmatrix} \right\| \quad (C.22)$$

Introduisons les réalisations minimales :

$$G(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_G & B_G \\ C_G & D_G \end{bmatrix} \quad W_e(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{W_e} & B_{W_e} \\ C_{W_e} & D_{W_e} \end{bmatrix} \quad W_u(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{W_u} & B_{W_u} \\ C_{W_u} & D_{W_u} \end{bmatrix} \quad W_3(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{W_3} & B_{W_3} \\ C_{W_3} & D_{W_3} \end{bmatrix} \quad (C.22)$$

Ici la difficulté principale est d'assurer la minimalité de la réalisation de $P(s)$. Pour cette raison nous cherchons une décomposition de $P(s)$ en un produit de fonction de transfert où $G(s)$, $W_e(s)$, $W_u(s)$, $W_3(s)$ et $Q^{-1}(s)$ n'apparaissent qu'une seule fois.

$$\begin{aligned} P(s) &= \left\| \begin{bmatrix} W_e(s)Q^{-1}(s) \\ 0_{m_2 \times m_1} \\ 0_{p \times m_1} \\ Q^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_e(s)G(s) \\ W_u(s) \\ W_3(s)G(s) \\ -G(s) \end{bmatrix} \right\| = \text{blkdiag}(W_e(s), W_u(s), W_3(s), I_p) \left\| \begin{bmatrix} Q^{-1}(s) \\ 0_{m_2 \times m_1} \\ 0_{p \times m_1} \\ Q^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -G(s) \\ I_{m_2} \\ G(s) \\ -G(s) \end{bmatrix} \right\| = \\ &= \text{blkdiag}(W_e(s), W_u(s), W_3(s), I_p) \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times m_2} & -I_p \\ 0_{m_2 \times p} & I_{m_2} & 0_{m_2 \times p} \\ 0_{p \times p} & 0_{p \times m_2} & I_p \\ I_p & 0_{p \times m_2} & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times p} & I_{m_2} \\ 0_{p \times p} & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1}(s) & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times m_1} & I_{m_2} \end{bmatrix} \quad (C.23) \end{aligned}$$

En remplaçant les réalisations minimales (C.21), (C.22), (C.24), (C.25) et (C.26) dans (C.23) on obtient (C.27) :

$$\begin{aligned} & \text{blkdiag}(W_e(s), W_u(s), W_3(s), I_p) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} \text{blkdiag}(A_{W_e}, A_{W_u}, A_{W_3}) & \begin{bmatrix} \text{blkdiag}(B_{W_e}, B_{W_u}, B_{W_3}) & 0_{(n_{W_e}+n_{W_u}+n_{W_3}) \times p} \end{bmatrix} \\ \text{blkdiag}(C_{W_e}, C_{W_u}, C_{W_3}) & \begin{bmatrix} \text{blkdiag}(D_{W_e}, D_{W_u}, D_{W_3}) & 0_{(2 \cdot p + m_2) \times p} \end{bmatrix} \\ 0_{p \times (n_{W_e}+n_{W_u}+n_{W_3})} & \begin{bmatrix} 0_{p \times (2 \cdot p + m_2)} & I_p \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times m_2} & -I_p \\ 0_{m_2 \times p} & I_{m_2 \times m_2} & 0_{m_2 \times p} \\ 0_{p \times p} & 0_{p \times m_2} & I_p \\ I_p & 0_{p \times m_2} & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times p} & I_{m_2} \\ 0_{p \times p} & G(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} A_G & \begin{bmatrix} 0_{n_G \times p} & B_G \end{bmatrix} \\ -C_G & \begin{bmatrix} I_p & | & -D_G \\ 0_{m_2 \times p} & | & I_{m_2} \\ 0_{p \times p} & | & D_G \end{bmatrix} \\ C_G & \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & | & D_G \end{bmatrix} \\ -C_G & \begin{bmatrix} I_p & | & -D_G \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\|$$

$$\begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times p} & I_{m_2} \\ 0_{p \times p} & G(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} A_G & \begin{bmatrix} 0_{n_G \times p} & B_G \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0_{p \times n_G} \\ 0_{m_2 \times n_G} \\ C_G \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_p & | & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times p} & | & I_{m_2} \\ 0_{p \times p} & | & D_G \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\|$$

$$\begin{bmatrix} Q^{-1}(s) & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times m_1} & I_{m_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} \underbrace{A_Q - B_Q D_Q^{-1} C_Q}_{A_{Q^{-1}}} & \begin{bmatrix} \underbrace{B_Q D_Q^{-1}}_{B_{Q^{-1}}} & | & 0_{n_Q \times m_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -D_Q^{-1} C_Q \\ C_{Q^{-1}} \\ 0_{m_2 \times n_Q} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_Q^{-1} \\ D_Q^{-1} \end{bmatrix} & | & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times m_1} & | & I_{m_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\| \quad (\text{C.75})$$

$$\begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times m_2} & -I_p \\ 0_{m_2 \times p} & I_{m_2} & 0_{m_2 \times p} \\ 0_{p \times p} & 0_{p \times m_2} & I_p \\ I_p & 0_{p \times m_2} & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times p} & I_{m_2} \\ 0_{p \times p} & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1}(s) & 0_{p \times m_2} \\ 0_{m_2 \times m_1} & I_{m_2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{cc} A_G & 0_{n_G \times n_Q} \\ 0_{n_Q^{-1} \times n_G} & \underbrace{A_Q - B_Q D_Q^{-1} C_Q}_{A_Q^{-1}} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} 0_{n_G \times m_1} & B_G \\ \underbrace{B_Q D_Q^{-1}}_{B_Q^{-1}} & 0_{n_Q \times m_2} \end{array} \right] \\ \hline \left[\begin{array}{cc} -C_G & \underbrace{-D_Q^{-1} C_Q}_{C_Q^{-1}} \\ 0_{m_2 \times n_G} & 0_{m_2 \times n_Q} \\ \underline{C_G} & \underline{0_{p \times n_Q}} \\ -C_G & \underbrace{-D_Q^{-1} C_Q}_{C_Q^{-1}} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{D_Q^{-1}}_{D_Q^{-1}} & -D_G \\ 0_{m_2 \times m_1} & I_{m_2} \\ \underline{0_{p \times m_1}} & \underline{D_G} \\ \underbrace{D_Q^{-1}}_{D_Q^{-1}} & -D_G \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (C.26)$$

$$P(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix}$$

$$A_P = \begin{bmatrix} A_{W_1} & 0_{n_{W_1} \times n_{W_2}} & 0_{n_{W_1} \times n_{W_3}} & -B_{W_1} C_G & -B_{W_1} D_Q^{-1} C_Q \\ 0_{n_{W_2} \times n_{W_1}} & A_{W_2} & 0_{n_{W_2} \times n_{W_3}} & 0_{n_{W_2} \times n_G} & 0_{n_{W_2} \times n_Q} \\ 0_{n_{W_3} \times n_{W_1}} & 0_{n_{W_3} \times n_{W_2}} & A_{W_3} & B_{W_3} C_G & 0_{n_{W_3} \times n_Q} \\ 0_{n_G \times n_{W_1}} & 0_{n_G \times n_{W_2}} & 0_{n_G \times n_{W_3}} & A_G & 0_{n_G \times n_Q} \\ 0_{n_Q \times n_{W_1}} & 0_{n_Q \times n_{W_2}} & 0_{n_Q \times n_{W_3}} & 0_{n_Q \times n_G} & A_Q - B_Q D_Q^{-1} C_Q \end{bmatrix}$$

$$B_P = \begin{bmatrix} B_{W_1} D_Q^{-1} & -B_{W_1} D_G \\ 0_{n_{W_2} \times m_1} & B_{W_2} \\ 0_{n_{W_3} \times m_1} & B_{W_3} D_G \\ 0_{n_G \times m_1} & B_G \\ \underbrace{B_Q D_Q^{-1}}_{B_Q^{-1}} & 0_{n_Q \times m_2} \end{bmatrix} ; D_P = \begin{bmatrix} D_{W_1} D_Q^{-1} & -D_{W_1} D_G \\ 0_{m_2 \times m_1} & D_{W_2} \\ 0_{p \times m_1} & D_{W_3} D_G \\ D_Q^{-1} & -D_G \end{bmatrix}$$

$$C_P = \begin{bmatrix} C_{W_1} & 0_{p \times n_{W_2}} & 0_{p \times n_{W_3}} & -D_{W_1} C_G & -D_{W_1} D_Q^{-1} C_Q \\ 0_{m_2 \times n_{W_1}} & C_{W_2} & 0_{m_2 \times n_{W_3}} & 0_{m_2 \times n_G} & 0_{m_2 \times n_Q} \\ 0_{p \times n_{W_1}} & 0_{n_{W_3} \times n_{W_2}} & C_{W_3} & D_{W_3} C_G & 0_{p \times n_Q} \\ 0_{p \times n_{W_1}} & 0_{p \times n_{W_2}} & 0_{p \times n_{W_3}} & -C_G & -D_Q^{-1} C_Q \end{bmatrix} \quad (C.27)$$

On notera que l'ordre du système augmenté $P(s)$ est égal à la somme de l'ordre du système et de l'ordre des fonctions de pondération. Présentons maintenant les principes de base du choix des fonctions de pondération.

C.4 Choix des fonctions de pondération

Le choix (et la modification généralement itérative) des fonctions de pondération est dicté par la volonté de "façonner" les valeurs singulières des fonctions de transfert caractéristiques et le besoin d'assurer la régularité du problème H_∞ résultant. Pour le problème de sensibilité mixte, le choix de filtres passe-bas et passe-haut donne généralement l'allure fréquentielle désirée des fonctions de transfert caractéristiques. Cependant, les fonctions de pondérations doivent être propres et stables. Pour cette raison, si on veut une erreur de poursuite nulle en régime établi en pondérant la fonction de sensibilité par un terme d'action intégrale, il faut approximer $\left(\frac{1}{s}\right)$ avec $\left(\frac{1}{s+\varepsilon}; \varepsilon \ll 1\right)$. De même, pour assurer que le signal de la commande soit atténué au delà de la bande passante, il faut remplacer la fonction de transfert $W_2(s) = (\tau s + 1)$, qui n'est pas propre, par la fonction de transfert $\left(W_2(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1}; \tau_2 \ll \tau_1\right)$. Dans la boîte à outil ROBUST CONTROL TOOLBOX de MATLAB (fonction **mixsyn**) est suggéré un choix préliminaire des fonctions de pondérations :

$$W_1 = \frac{\frac{s}{\gamma^*} + \omega_b}{s + \omega_b A^*} ; \quad W_3 = \frac{s + \frac{\omega_b}{\gamma^*}}{A^* s + \omega_b} \quad (C.28)$$

où ω_b est la largeur de la bande passante, telle que $|T(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ($\gamma^* \geq 1$) est la norme désirée et ($A^* \leq 1$), souvent ($A^* \ll 1$) est l'atténuation désirée des perturbations dans la

bande passante. L'idée est que $\left(\frac{1}{|W_l|} = A^*\right)$ en basse fréquence, $\left(\frac{1}{|W_l|} = \gamma^*\right)$ en hautes fréquences et $\left(\frac{1}{|W_l|} \approx 1\right)$ pour la fréquence ω_b . Bates et Postlethwaite [BP02] présentent les différentes étapes de la synthèse de la commande robuste, ainsi qu'une discussion pratique sur le choix des fonctions de pondérations.

ANNEXE D : SCRIPTS

Le script suivant nous permet de calculer la dynamique de battement et de traînée pour un rotor articulé selon la figure 2.9. Le script utilise le logiciel MAPLE.

```
> with(LinearAlgebra):
Définition des matrices de rotation
> Rotpsi := Matrix([[sin(psi), -cos(psi), 0], [cos(psi), sin(psi), 0], [0, 0, 1]]):
> Rotdelta:=Matrix([[cos(delta), sin(delta), 0], [-sin(delta), cos(delta), 0], [0, 0, 1]]):
> Rotbeta:=Matrix([[1, 0, 0], [0, cos(beta), sin(beta)], [0, -sin(beta), cos(beta)]]):
Calcul du vecteur de la position <x, y, z> du point P dans le repère fixe
> <x2, y2, z2> := <0, ab, 0> + MatrixVectorMultiply(Rotbeta, <0, rb, 0>):
> <x3, y3, z3> := <0, ed, 0> + MatrixVectorMultiply(Rotdelta, <x2, y2, z2>):
> <x, y, z> := MatrixVectorMultiply(Rotpsi, <x3, y3, z3>):
Calcul du vecteur de la vitesse <deV> du point P dans le repère mobile
> deV1:=Omega*map(diff, <x, y, z>, psi):      # Omega := Diff(psi, t)
> deV2:=Xi*map(diff, <x, y, z>, delta):      # Xi := Diff(delta, t)
> deV3:=Upsilon*map(diff, <x, y, z>, beta):    # Upsilon := Diff(beta, t)
> deV := deV1+deV2+deV3:
Définition du vecteur de la vitesse <V0> de l'origine du repère mobile
> V0 := <uS, vS, wS> + <pS, qS, rS> &x <l_M, b_M, h_M>:
Définition du vecteur de la vitesse totale <Vloc> du point P dans le repère fixe
> Vloc := V0 + deV + <pS, qS, rS> &x <x, y, z>:
Définition du vecteur de l'accélération totale <A0> de l'origine du repère mobile
> A0 := <DotuS, DotvS, DotwS> + <DotpS, DotqS, DotrS> &x <l_M, b_M, h_M> +
<pS, qS, rS> &x (<uS, vS, wS> + <pS, qS, rS> &x <l_M, b_M, h_M>):
Calcul du vecteur de l'accélération <de2V> du point P dans le repère mobile
> de2V1 := Omega*map(diff, deV, psi):      # Omega := Diff(psi, t)
> de2V2 := DotOmega*map(diff, deV, Omega):  # DotOmega := Diff(Omega, t)
> de2V3 := Xi*map(diff, deV, delta):      # Xi := Diff(delta, t)
> de2V4 := DotXi*map(diff, deV, Xi):      # DotXi := Diff(Xi, t)
> de2V5:=Upsilon*map(diff, deV, beta):      # Upsilon := Diff(beta, t)
> de2V6:=DotUpsilon*map(diff, deV, Upsilon): # DotUpsilon := Diff(Upsilon, t)
> de2V := de2V1+de2V2+de2V3+de2V4+de2V5+de2V6:
Définition du vecteur de l'accélération totale <Aloc> du point P dans le repère fixe
> Aloc := A0+de2V+<DotpS, DotqS, DotrS> &x <x, y, z>+<pS, qS, rS> &x (2*deV +
<pS, qS, rS> &x <x, y, z>):
Définition de l'énergie cinétique
> VeVe :=DotProduct(Vloc, Vloc, conjugate=false):
> Te:= 1/2*(I_beta*coeff(VeVe,rb,2) + M_beta*coeff(VeVe,rb,1) +
masse_b*coeff(VeVe,rb,0)):
Calcul de la dynamique de battement
> Beta_Dynamique:=simplify(I_beta*coeff(DotProduct(map(diff, <x, y, z>, beta),
Aloc, conjugate=false), rb, 2) + M_beta*coeff(DotProduct(map(diff, <x, y,
z>, beta), Aloc, conjugate=false), rb, 1) +
masse_b*coeff(DotProduct(map(diff, <x, y, z>, beta), Aloc,
conjugate=false), rb, 0)):

```


Calcul de la dynamique de trainée

```
> Delta_Dynamique:=simplify(I_beta*coeff(DotProduct(map(diff,<x, y,
z>,delta), Aloc,conjugate=false),rb,2) + M_beta*coeff(DotProduct(map(diff,<x,
y, z>,delta), Aloc, conjugate=false),rb,1) +
masse_b*coeff(DotProduct(map(diff,<x, y, z>,delta), Aloc,
conjugate=false),rb,0)):
```

Calcul de la dynamique complémentaire de trainée

```
> <xd,yd,zd> := MatrixVectorMultiply(Rotpsi,<0,ed,0> +
MatrixVectorMultiply(Rotdelta,<0,rd,0>)):
> deV_Complémentaire:= Omega*map(diff,<xd,yd,zd>,psi) + Xi*map(diff,<xd, yd,
zd>,delta):
> Vloc3:= V0 + deV_Complémentaire + <pS, qS, rS> &x (<xd, yd, zd>):
> de2V_Complémentaire:= Omega*map(diff,deV_Complémentaire,psi) +
DotOmega*map(diff, deV_Complémentaire,Omega) +
Xi*map(diff,deV_Complémentaire,delta) +
DotXi*map(diff,deV_Complémentaire,Xi):
> Aloc3 := A0 + de2V_Complémentaire + <DotpS, DotqS, DotrS> &x <xd, yd,
zd>+<pS, qS, rS> &x (2*deV_Complémentaire + <pS,qS,rS> &x <xd, yd, zd>):
>
Delta_Dynamique_Complémentaire:=simplify(I_delta*coeff(DotProduct(map(diff,<x
d, yd, zd>,delta), Aloc3,conjugate=false),rd,2) +
M_delta*coeff(DotProduct(map(diff,<xd, yd, zd>,delta), Aloc3,
conjugate=false),rd,1)):
```

Le script suivant nous permet de calculer la dynamique du battement vertical des pales et l'équation dynamique de l'extrémité de la pale, en utilisant le logiciel MAPLE.

```
> with(LinearAlgebra):
> kt_sec2ft := 1852/(3600*.3048): deg2rad := Pi/180: Digits := 6:
  Calcul du poids de la cellule sans pales
> G[rossWeight] := 16638: N[Blades] := 4: W[eightBlade[MR]] := 256.9:
  G[rossWeight] est le poids total de l'hélicoptère [lb], N[Blades] est le nombre des pales, W[eightBlade[MR]] est le
  poids d'une pale [lb]
> W[eight[Body]] := (G[rossWeight] - N[Blades]*W[eightBlade[MR]]):
> FS[CG] := 355.9: BL[CG] := 0: WL[CG] := 248.2:
  FS[CG] est la référence longitudinale du centre de gravité total [inch]
  BL[CG] est la référence latérale du centre de gravité total [inch]
  WL[CG] est la référence verticale du centre de gravité total [inch]
> FS[MR] := 341.2: BL[MR] := 0: WL[MR] := 315.0:
  FS[MR] est la référence longitudinale du repère moyeu [inch]
  BL[MR] est la référence latérale du repère moyeu [inch]
  WL[MR] est la référence verticale du repère moyeu [inch]
> FS[CG[B]] := (G[rossWeight]*FS[CG] -
  N[Blades]*W[eightBlade[MR]]*FS[MR])/W[eight[Body]]:
> BL[CG[B]] := (G[rossWeight]*BL[CG] -
  N[Blades]*W[eightBlade[MR]]*BL[MR])/W[eight[Body]]:
> WL[CG[B]] := (G[rossWeight]*WL[CG] -
  N[Blades]*W[eightBlade[MR]]*WL[MR])/W[eight[Body]]:
  Calcule de la position du repère moyeu par rapport au centre de masse de giravion [ft]
> <l[h[x]],l[h[y]],l[h[z]]> := <(FS[CG[B]] - FS[MR])/12, (BL[CG[B]] -
  BL[MR])/12, (WL[CG[B]] - WL[MR])/12>:
> FSCG_aft := 360.2: FSCG_fwd = 345.7: FSCG_nom := (FSCG_aft + FSCG_fwd)/2:
  p_FSCG := (FSCG_aft - FSCG_fwd)/(FSCG_aft + FSCG_fwd):
> BLCG_aft = 0: BLCG_fwd = 0: BLCG_nom := (BLCG_aft + BLCG_fwd)/2: p_BLCG :=
  (BLCG_aft - BLCG_fwd)/(BLCG_aft + BLCG_fwd):
> WLCG_aft := 251.1: WLCG_fwd = 244.4: WLCG_nom := (WLCG_aft + WLCG_fwd)/2:
  p_WLCG := (WLCG_aft - WLCG_fwd)/(WLCG_aft + WLCG_fwd):
> FS[CG[B]] := FSCG_nom*(1 + p_FSCG*delta[FSCG]):
> BL[CG[B]] := BLCG_nom*(1 + p_BLCG*delta[BLCG]):
> WL[CG[B]] := WLCG_nom*(1 + p_WLCG*delta[WLCG]):
> <l[h[x]],l[h[y]],l[h[z]]> := <(FS[CG[B]] - FS[MR])/12, (BL[CG[B]] -
  BL[MR])/12, (WL[CG[B]] - WL[MR])/12>:
  Calcule de la position du repère rotor anti-couple par rapport au centre de masse de giravion [ft]
> FS[TR] := 732: BL[TR] := -14: WL[TR] := 324.7:
  FS[TR] Fuselage station for horizontal tail rotor [inch]
  BL[TR] Buttline station for vertical tail rotor [inch]
  WL[TR] Waterline station for vertical tail rotor [inch]
> <l[tr[x]],l[tr[y]],l[tr[z]]> := <(FS[CG[B]] - FS[TR])/12, -(BL[CG[B]] -
  BL[TR])/12, (WL[CG[B]] - WL[TR])/12>:
  Orientation du pilon par rapport au repère "moyeu"
> Phi[Shaft] := 0: Theta[Shaft] := 3*Pi/180:
> Rot[Shaft/Body] := <<cos(Theta[Shaft]) | 0 | -sin(Theta[Shaft])>,
  <sin(Theta[Shaft])*sin(Phi[Shaft]) | cos(Phi[Shaft]) |
  cos(Theta[Shaft])*sin(Phi[Shaft])>, <sin(Theta[Shaft])*cos(Phi[Shaft]) | -
  sin(Phi[Shaft]) | cos(Theta[Shaft])*cos(Phi[Shaft])>>:
> T[Phi[E]] := <<1 | 0 | 0>, <0 | cos(Phi[E]) | sin(Phi[E])>, <0 | -
  sin(Phi[E]) | cos(Phi[E])>>:
# Matrice de rotation par rapport l'axe inertiel x
```

```

> T[Theta[E]] := <<cos(Theta[E]) | 0 | -sin(Theta[E])>, <0 | 1 | 0>,
<sin(Theta[E]) | 0 | cos(Theta[E])>>:
# Matrice de rotation par rapport l'axe inertiel y
> T[Psi[E]] := <<cos(Psi[E]) | sin(Psi[E]) | 0>, <-sin(Psi[E]) | cos(Psi[E]) |
0>, <0 | 0 | 1>>:
# Matrice de rotation par rapport l'axe inertiel h
> T[Body/Earth[E]] := Multiply(Multiply(T[Phi[E]],T[Theta[E]]), T[Psi[E]]):
> V[Earth[E]] := Multiply(Transpose(T[Body/Earth[E]]), <u[Body[E]],
v[Body[E]], w[Body[E]]>):
> # V[Earth[E]] := <DotX[E], DotY[E], -DotH[E]>:
> Delta_T[Diff(V,eta)] :=
<<Multiply(Multiply(Multiply(map(diff,T[Phi[E]],Phi[E]),T[Theta[E]]),T[Psi[E]
]), V[Earth[E]])> |
<Multiply(Multiply(Multiply(T[Phi[E]],map(diff,T[Theta[E]],Theta[E])),T[Psi[E]
]), V[Earth[E]])> |
<Multiply(Multiply(Multiply(T[Phi[E]],T[Theta[E]]),map(diff,T[Psi[E]],Psi[E])
), V[Earth[E]])>>:
> T[Diff(omega,eta)[E]] := <<1 | 0 | -sin(Theta[E])>, <0 | cos(Phi[E]) |
sin(Phi[E])*cos(Theta[E])>, <0 | -sin(Phi[E]) | cos(Phi[E])*cos(Theta[E])>>:
> inverse_T[Diff(omega,eta)[E]] := <<1 | sin(Phi[E])*tan(Theta[E]) |
cos(Phi[E])*tan(Theta[E])>, <0 | cos(Phi[E]) | -sin(Phi[E])>, <0 |
sin(Phi[E])/cos(Theta[E]) | cos(Phi[E])/cos(Theta[E])>>:
> T[Diff(Gravity,eta)[E]] :=
Gravity*<<cos(Theta[E])*sin(Psi[E])|cos(Psi[E])|0>, <-
cos(Theta[E])*cos(Psi[E])|sin(Psi[E])|0>, <0|0|0>>:
Vitesse et accélération linéaire et angulaire du repère moyeu par rapport au repère inertiel, exprimées dans le
repère fixe
> # u[Body] := 0.5*kt_sec2ft: v[Body] := 0*kt_sec2ft: w[Body] := 0*kt_sec2ft:
> # p[Body] := 0: q[Body] := 0: r[Body] := 0:
> V[Shaft] := MatrixVectorMultiply(Rot[Shaft/Body],
<u[Body],v[Body],w[Body]>):
> omega[Shaft] := MatrixVectorMultiply(Rot[Shaft/Body],
<p[Body],q[Body],r[Body]>):
> Dot[omega][Shaft] := MatrixVectorMultiply(Rot[Shaft/Body],
<Dot[p][Body],Dot[q][Body],Dot[r][Body]>):
> Dot[V][Shaft] := MatrixVectorMultiply(Rot[Shaft/Body],
<Dot[u][Body],Dot[v][Body],Dot[w][Body]>):
Définition des matrices de rotation.
> Rot[psi] := Matrix([[sin(psi),-cos(psi),0],[cos(psi),sin(psi),0],[0,0,1]]):
> Rot[beta] := Matrix([[1,0,0],[0,cos(beta),sin(beta)],[0,-
sin(beta),cos(beta)]]):
Calcul du vecteur de la position <x, y, z> d'un point dans le repère fixe
> <x[b][mobile], y[b][mobile], z[b][mobile]> := <0, epsilon*R[otor], 0> +
MatrixVectorMultiply(Rot[beta],<0, r[b], 0>):
> <x[b][fixe], y[b][fixe], z[b][fixe]> :=
MatrixVectorMultiply(Rot[psi],<x[b][mobile], y[b][mobile], z[b][mobile]>):
Définition du vecteur de la vitesse <V[hub]> du repère fixe;
> V[hub] := V[Shaft] + omega[Shaft] &x <1[h[x]],1[h[y]],1[h[z]]>:
> deV:=
Omega[motor]*map(diff,<x[b][fixe],y[b][fixe],z[b][fixe]>,psi)+Upsilon*map(dif
f,<x[b][fixe],y[b][fixe],z[b][fixe]>,beta):
Définition du vecteur de la vitesse totale <Vloc> du point dans le repère fixe
> Vloc := V[hub] + deV + omega[Shaft] &x <x[b][fixe], y[b][fixe],
z[b][fixe]>:
Définition du vecteur de l'accélération totale <A0> du repère mobile
> A[hub] := Dot[V][Shaft] + Dot[omega][Shaft] &x <1[h[x]],1[h[y]],1[h[z]]> +
omega[Shaft] &x (V[Shaft] + omega[Shaft] &x <1[h[x]],1[h[y]],1[h[z]]>):
Calcul du vecteur de l'accélération <de2V> du point dans le repère mobile

```

```

> de2V1 := Omega[motor]*map(diff,deV,psi): # Omega[motor] := Diff(psi, t)
> de2V2 := DotOmega[motor]*map(diff,deV,Omega): # DotOmega := Diff(Omega, t)
> de2V5 := Upsilon*map(diff,deV,beta): # Upsilon := Diff(beta, t)
> de2V6 := DotUpsilon*map(diff,deV,Upsilon): # DotUpsilon := Diff(Upsilon, t)
> de2V := de2V1+de2V2+de2V5+de2V6:
Définition du vecteur de l'accélération totale <Aloc> du point dans le repère fixe
> Aloc := A[hub] + de2V + Dot[omega][Shaft] &x <x[b][fixe], y[b][fixe],
z[b][fixe]> + omega[Shaft] &x (2*deV + omega[Shaft] &x <x[b][fixe],
y[b][fixe], z[b][fixe]>):
masse_b*coeff(VeVe,r[b],0)):
Définition de l'énergie cinétique
> VeVe :=DotProduct(Vloc, Vloc, conjugate=false):
> Te:= 1/2*(I_beta*coeff(VeVe,r[b],2) + M_beta*coeff(VeVe,r[b],1) +
masse_b*coeff(VeVe,r[b],0)):
Calcul de la dynamique de battement
> Beta_Dynamique:=simplify(I_beta*coeff(DotProduct(map(diff,<x[b][fixe],
y[b][fixe], z[b][fixe]>,beta), Aloc,conjugate=false),r[b],2) +
M_beta*coeff(DotProduct(map(diff,<x[b][fixe], y[b][fixe], z[b][fixe]>,beta),
Aloc, conjugate=false),r[b],1) +
masse_b*coeff(DotProduct(map(diff,<x[b][fixe], y[b][fixe], z[b][fixe]>,beta),
Aloc, conjugate=false),r[b],0)):
Calcul des composantes de la force de gravité
> # Gravity :=32.147: # gravity acceleration [ft/sec^2]
> Ge := Gravity*-<sin(Theta[Body]), sin(Phi[Body])*cos(Theta[Body]),
cos(Phi[Body])*cos(Theta[Body])>:
> Ge_beta := M_beta*coeff(DotProduct(map(diff,<x[b][fixe], y[b][fixe],
z[b][fixe]>,beta), MatrixVectorMultiply(Rot[Shaft/Body],Ge),
conjugate=false),r[b],1):
Calcul des composantes de la force aérodynamique. Calcul de la vitesse de vol dans le repère moyeu-vent
> Vflight := DotProduct(V[hub],V[hub],conjugate=false):
> V[Shaft/Wind] := <sqrt(DotProduct(<V[hub][1], V[hub][2], 0>, <V[hub][1],
V[hub][2], 0>, conjugate=false)), 0, V[Shaft][3]>:
Calcul de l'angle de glissement du disque du rotor principale par rapport au vent
> Zeta := arctan(V[hub][2],V[hub][1]): #
cos(Zeta):=V[hub][1]/V[Shaft/Wind][1]: sin(Zeta):=V[hub][2]/V[Shaft/Wind][1]:
> # RotFlight := <<cos(Zeta) | sin(Zeta) | 0>, <-sin(Zeta) | cos(Zeta) | 0>,
<0 | 0 | 1>>:
> RotFlight := <<cosZeta | sinZeta | 0>, <-sinZeta | cosZeta | 0>, <0 | 0 |
1>>:
Calcul de l'angle effectif d'incidence du disque du rotor principale par rapport au vent
> Alpha := arctan(V[hub][3],V[Shaft/Wind][1]): #
cos(Alpha):=V[Shaft/Wind][1]/Vflight: sin(Alpha):=V[hub][3]/Vflight
# V[Shaft/Wind][1] := Vflight*cos(Alpha): V[Shaft/Wind][3] :=
Vflight*sin(Alpha):
Calcul des composantes de la vitesse angulaire dans le repère moyeu-vent fixe
> DotZeta :=(V[hub][1]/V[Shaft/Wind][1])^2*(A[hub][2]/A[hub][1]):
> omega[Shaft/Wind] := MatrixVectorMultiply(RotFlight, <omega[Shaft][1],
omega[Shaft][2], (omega[Shaft][3]+DotZeta)>):
> Dot[omega][Shaft/Wind] := MatrixVectorMultiply(RotFlight,
<Dot[omega][Shaft][1], Dot[omega][Shaft][2],
(DotDotZeta+Dot[omega][Shaft][3])>):
Calcul des composantes de la vitesse angulaire dans le repère moyeu-vent mobile
> <pX, qY, rZ> := MatrixVectorMultiply(Transpose(Rot[psi]),
<omega[Shaft/Wind][1], omega[Shaft/Wind][2], 0*omega[Shaft/Wind][3]>):
Calcul de la vitesse aérodynamique locale
> # mu :=V[Shaft/Wind][1]/(Omega[motor]*R[otor]): lambda :=
(V[Shaft/Wind][3]-mu)/(Omega[motor]*R[otor])
> # lambda[0]+lambda[c]*cos(psi)+lambda[s]*sin(psi)

```

```

> Vaéro := (MatrixVectorMultiply(Transpose(Rot[beta]),
MatrixVectorMultiply(Transpose(Rot[psi]), <mu*(Omega[motor]*R[otor]), 0, 0> +
<0, 0, (lambda[0]+lambda[c]*cos(psi)+lambda[s]*sin(psi))*Omega[motor]*R[otor])
> + Omega[motor]*map(diff, <x[b][fixe], y[b][fixe], z[b][fixe]>, psi)) + <pK,
qY, rZ> &x <0, epsilon*R[otor]+r[b], 0>) + <-Upsilon, 0, 0> &x <0, r[b], 0>):
> Vaéro_simple := simplify(subs({cos(beta)=1, sin(beta)=beta}, Vaéro)):
Définition de l'angle de pas theta dans le repère moyeu-vent mobile
> # delta3:=0:
> theta := theta0+(epsilon*R[otor]+r[b])/R[otor]*theta1 - A1[w]*cos(psi) -
B1[w]*sin(psi) - delta3*beta:
Définition de la force aérodynamique
> # a := 5.73: c[drag][0]:=0.009: c[drag][1]:=0.3:
C[drag]:=c[drag][0]+c[drag][1]*(6*C[Thrust]/(a*sigma))^2 :
Lock:=rho*a*c*R[otor]^4/I_beta: rho:=0.002377:
> dFaéro_simple := 1/2*rho*a*c*(Vaéro_simple[1]^2*theta +
Vaéro_simple[1]*Vaéro_simple[3]):
> Maéro := int(dFaéro_simple*r[b], r[b]=0..(R[otor]-epsilon*R[otor])):
> maéro := 1/2*rho*a*c*R[otor]^4*Omega[motor]^2*((1/4-
epsilon/3+epsilon^4/12+mu*sin(psi)*(2/3-epsilon+epsilon^3/3+1/2*mu*sin(psi)-
mu*epsilon*sin(psi)+1/2*mu*epsilon^2*sin(psi)))*(theta0 - A1[w]*cos(psi) -
B1[w]*sin(psi)) + (1/5-epsilon/4+epsilon^5/20+mu*sin(psi)*(1/2-
2/3*epsilon+epsilon^4/6+1/3*mu*sin(psi) -
1/2*mu*epsilon*sin(psi)+mu*sin(psi)*epsilon^3/6))*theta1 + ((1-
epsilon)^3/3+(mu*sin(psi)+epsilon)*(1-
epsilon)^2/2)*(lambda[0]+lambda[c]*cos(psi)+lambda[s]*sin(psi)) - ((1/4-
epsilon/3+epsilon^4/12+mu*sin(psi)*(2/3-epsilon+epsilon^3/3+1/2*mu*sin(psi)-
mu*epsilon*sin(psi)+1/2*mu*epsilon^2*sin(psi)))*delta3 + cos(psi)*mu*(1/3-
1/2*epsilon+epsilon^3/6+mu*sin(psi)*(1/2-epsilon+1/2*epsilon^2))*beta -
(1/4-2/3*epsilon+epsilon^2/2-epsilon^4/12+mu*sin(psi)*(1/3-epsilon+epsilon^2-
epsilon^3/3))*Upsilon/Omega[motor] +
(1/4-epsilon/3+epsilon^4/12+mu*sin(psi)*(1/3-
epsilon/2+epsilon^3/6))*omega[Shaft/Wind][1]*sin(psi)
+omega[Shaft/Wind][2]*cos(psi))/Omega[motor]):
> maéro1 := 1/2*rho*a*c*R[otor]^4*Omega[motor]^2*((1/4-
epsilon/3+epsilon^4/12+mu*sin(psi)*(2/3-epsilon+epsilon^3/3+1/2*mu*sin(psi)-
mu*epsilon*sin(psi)+1/2*mu*epsilon^2*sin(psi)))*(theta0 - A1[w]*cos(psi) -
B1[w]*sin(psi)) + (1/5-epsilon/4+epsilon^5/20+mu*sin(psi)*(1/2-
2/3*epsilon+epsilon^4/6+1/3*mu*sin(psi) -
1/2*mu*epsilon*sin(psi)+mu*sin(psi)*epsilon^3/6))*theta1 + ((1-
epsilon)^3/3+(mu*sin(psi)+epsilon)*(1-
epsilon)^2/2)*(lambda[0]+lambda[c]*cos(psi)+lambda[s]*sin(psi)) - ((1/4-
epsilon/3+epsilon^4/12+ mu*sin(psi)*(2/3-epsilon+epsilon^3/3+1/2*mu*sin(psi)-
mu*epsilon*sin(psi)+1/2*mu*epsilon^2*sin(psi)))*delta3 + cos(psi)*mu*(1/3-
1/2*epsilon+epsilon^3/6+mu*sin(psi)*(1/2-epsilon+1/2*epsilon^2))*beta -
(1/4-2/3*epsilon+epsilon^2/2-epsilon^4/12+mu*sin(psi)*(1/3-epsilon+epsilon^2-
epsilon^3/3))*Upsilon/Omega[motor] +
(1/4-
epsilon/3+epsilon^4/12)*(omega[Shaft/Wind][1]*sin(psi)+omega[Shaft/Wind][2]*c
os(psi))/Omega[motor] +
mu/2*(1/3-epsilon/2+epsilon^3/6)*(omega[Shaft/Wind][1]*(1-
cos(2*psi))+omega[Shaft/Wind][2]*sin(2*psi))/Omega[motor]):
> simplify(Maéro-maéro1);
0
> simplify(Maéro-maéro1);
0

```

```

> Maéro_simple := subs({epsilon^3=0, epsilon^4=0, epsilon^5=0},
simplify(Maéro)):
> maéro_simple := 1/2*rho*a*c*R[otor]^4*Omega[motor]^2*((1/4-
epsilon/3+mu*sin(psi)*(2/3-epsilon+1/2*mu*sin(psi) -mu*epsilon*sin(psi) +
1/2*mu*epsilon^2*sin(psi)))*(theta0 - A1[w]*cos(psi) - B1[w]*sin(psi)) +
(1/5-epsilon/4+mu*sin(psi)*(1/2-2/3*epsilon+1/3*mu*sin(psi) -
1/2*mu*epsilon*sin(psi)))*theta1 + (1/3-epsilon/2+mu*sin(psi)*(1-
epsilon)^2/2)*(lambda[0]+lambda[c]*cos(psi)+lambda[s]*sin(psi)) - ((1/4-
epsilon/3 + mu*sin(psi)*(2/3-epsilon+1/2*mu*sin(psi) -
mu*epsilon*sin(psi)+1/2*mu*epsilon^2*sin(psi)))*delta3 + cos(psi)*mu*(1/3-
1/2*epsilon+mu*sin(psi)*(1/2-epsilon+1/2*epsilon^2))*beta - (1/4-
2/3*epsilon+epsilon^2/2+mu*sin(psi)*(1/3-
epsilon+epsilon^2))*Upsilon/Omega[motor] + (1/4-epsilon/3+mu*sin(psi)*(1/3-
epsilon/2))* (omega[Shaft/Wind][1]*sin(psi)+omega[Shaft/Wind][2]*cos(psi))/Ome
ga[motor]):
> simplify(Maéro_simple-maéro_simple);

```

□

Formulation de l'équation de battement

```

> M[centrifuge] := -
Omega[motor]^2*(I_beta*cos(beta)+epsilon*R[otor]*M_beta)*sin(beta):
> M[inertiel] := -I_beta*DotUpsilon:
> M[coriolis] :=
2*(I_beta+epsilon*R[otor]*M_beta)*(omega[Shaft/Wind][1]*cos(psi)-
omega[Shaft/Wind][2]*sin(psi))*Omega[motor]:
> # K_beta[spring] :=0:
> M[spring] := -K_beta[spring]*beta:
> M[accélération_angulaire] :=
I_beta*(Dot[omega][Shaft/Wind][1]*sin(psi)+Dot[omega][Shaft/Wind][2]*cos(psi)
):
> M[accélération_vetricale] := M_beta*(A[hub][3] + omega[Shaft][1]*V[hub][2]
- omega[Shaft][2]*V[hub][1]):
> Beta_Dynamique_simple := maéro/I_beta + subs(cos(beta)=1, sin(beta)=beta,
M[centrifuge] + M[inertiel] + M[coriolis] + M[spring] +
M[accélération_angulaire] + M[accélération_vetricale] -
M_beta*Gravity)/I_beta:

```

Fourier Coordinate Transformation

```

> temp01 := coeff(-Beta_Dynamique_simple, Upsilon):
> temp02 := subs(sin(psi)=sin(psi+Pi/2), coeff(-Beta_Dynamique_simple,
Upsilon)):
> temp03 := subs(sin(psi)=sin(psi+Pi), coeff(-Beta_Dynamique_simple,
Upsilon)):
> temp04 := subs(sin(psi)=sin(psi+3*Pi/2), coeff(-Beta_Dynamique_simple,
Upsilon)):
> Matrice_A_Psi := Matrix(<temp01, temp02, temp03, temp04>, shape=diagonal):
> temp05 := coeff(-Beta_Dynamique_simple, beta):
> temp06 := subs((sin(psi)=sin(psi+Pi/2), cos(psi)=cos(psi+Pi/2)), coeff(-
Beta_Dynamique_simple, beta)):
> temp07 := subs((sin(psi)=sin(psi+Pi), cos(psi)=cos(psi+Pi)), coeff(-
Beta_Dynamique_simple, beta)):
> temp08 := subs((sin(psi)=sin(psi+3*Pi/2), cos(psi)=cos(psi+3*Pi/2)),
coeff(-Beta_Dynamique_simple, beta)):
> Matrice_B_Psi := Matrix(<temp05, temp06, temp07, temp08>, shape=diagonal):
> temp09 := subs(DotUpsilon=0, Upsilon=0, beta=0, Beta_Dynamique_simple):

```

```

> temp10 := subs(DotUpsilon=0, Upsilon=0, beta=0,
{sin(psi)=sin(psi+Pi/2), cos(psi)=cos(psi+Pi/2)}, Beta_Dynamique_simple):
> temp11 := subs(DotUpsilon=0, Upsilon=0, beta=0, {sin(psi)=sin(psi+Pi),
cos(psi)=cos(psi+Pi)}, Beta_Dynamique_simple):
> temp12 := subs(DotUpsilon=0, Upsilon=0, beta=0, {sin(psi)=sin(psi+3*Pi/2),
cos(psi)=cos(psi+3*Pi/2)}, Beta_Dynamique_simple):
> f_R := <temp09, temp10, temp11, temp12>:
> Matrice_TS := <<1 | cos(psi) | sin(psi) | cos(2*psi) | sin(2*psi) | -1>, <1 |
cos(psi+Pi/2) | sin(psi+Pi/2) | cos(2*(psi+Pi/2)) | sin(2*(psi+Pi/2)) | 1>, <1 |
cos(psi+Pi) | sin(psi+Pi) | cos(2*(psi+Pi)) | sin(2*(psi+Pi)) | -1>,
<1 | cos(psi+3*Pi/2) | sin(psi+3*Pi/2) | cos(2*(psi+3*Pi/2)) |
sin(2*(psi+3*Pi/2)) | 1>>:
> Matrice_TS := Matrix(<1/sqrt(N[Blades]), sqrt(2/N[Blades]),
sqrt(2/N[Blades]), sqrt(2/N[Blades]), sqrt(2/N[Blades]), 1/sqrt(N[Blades])>,
shape=diagonal):
> inverse_T := Multiply(Matrice_TS^2, Transpose(Matrice_T)):
> temp13 := map(diff, map(diff, Matrice_T, psi), psi)*Omega[motor]^2 +
Multiply(Matrice_A_Psi, map(diff, Matrice_T, psi)*Omega[motor]) +
Multiply(Matrice_B_Psi, Matrice_T):
> D_matrice := Multiply(inverse_T, 2*map(diff, Matrice_T, psi)*Omega[motor]
+ Multiply(Matrice_A_Psi, Matrice_T)):
> K_matrice := Multiply(inverse_T, temp13):
> f_vector := Multiply(inverse_T, f_R):
Équation du disque rotor en coordonnées unis
> D_bar := algsubs(rho*a*c*R[otor]^4/I_beta=gamma, simplify(D_matrice)):
> K_bar := simplify(algsubs(rho*a*c*R[otor]^4/I_beta=gamma, K_matrice)):
> f_bar := combine(Multiply(Matrix(<1,-1,-1,-1,-1,1>, shape=diagonal),
f_vector)):
> D_bar_simple := subs({cos(2*psi)=0, sin(2*psi)=0, cos(4*psi)=0, sin(4*psi)=0},
combine(D_bar)):
> K_bar_simple := subs({cos(2*psi)=0, sin(2*psi)=0, cos(4*psi)=0, sin(4*psi)=0},
combine(K_bar)):

```

Équation réduite de l'extrémité de la pale

```

> Dtild_réduite := algsubs(rho*a*c*R[otor]^4/I_beta=gamma,
simplify(<<D_matrice[1,1] | -D_matrice[1,2] | -D_matrice[1,3]>, <-
D_matrice[2,1] | D_matrice[2,2] | D_matrice[2,3]>, <-D_matrice[3,1] |
D_matrice[3,2] | D_matrice[3,3]>>)):
> Ktild_réduite := simplify(algsubs(rho*a*c*R[otor]^4/I_beta=gamma,
<<K_matrice[1,1] | -K_matrice[1,2] | -K_matrice[1,3]>, <-K_matrice[2,1] |
K_matrice[2,2] | K_matrice[2,3]>, <-K_matrice[3,1] | K_matrice[3,2] |
K_matrice[3,3]>>)):
> ftild_réduite := subs({lambda[0]=(V[Shaft/Wind][3]-
nu[0])/Omega[motor]*R[otor]}, lambda[c]=-nu[c]/Omega[motor]*R[otor]),
lambda[s]=-nu[s]/Omega[motor]*R[otor]), combine(Multiply(Matrix(<1, -1, -
1>, shape=diagonal), f_vector[1..3]))):
> Dtild_réduite_simple :=
subs({cos(2*psi)=0, sin(2*psi)=0, cos(4*psi)=0, sin(4*psi)=0},
combine(Dtild_réduite)):
> Dtild_réduite_simple1 :=
subs({cos(2*psi)=0, sin(2*psi)=0, cos(4*psi)=0, sin(4*psi)=0, mu=0},
combine(Dtild_réduite)):
> Ktild_réduite_simple :=
subs({cos(2*psi)=0, sin(2*psi)=0, cos(4*psi)=0, sin(4*psi)=0},
combine(Ktild_réduite)):
> Ktild_réduite_simple1 :=
subs({cos(2*psi)=0, sin(2*psi)=0, cos(4*psi)=0, sin(4*psi)=0, mu=0},
combine(Ktild_réduite)):

```

```

> Ktild_réduite_simple_minus_one :=
Adjoint(Ktild_réduite_simple)/Determinant(Ktild_réduite_simple):
> Matrice_Evolution_Beta_réduite := subs(rho=0.002377, a=5.73, c=1.73,
R[otor]=26.83, Omega[motor]=27, I_beta=1512.6, gamma=8.1936,
epsilon=1.25/26.83, M_beta=86.7, K_beta[spring]=0, delta3=0, <<Matrix(3) |
Matrix(<1,1,1>, shape=diagonal)>, <simplify(-Ktild_réduite_simple) |
simplify(-Dtild_réduite_simple)>>):
> Eigenvalues(Matrice_Evolution_Beta_réduite):
> Eigenvalues(subs(mu=0.0, Matrice_Evolution_Beta_réduite)):

> Eigenvalues(subs(mu=0.3, Matrice_Evolution_Beta_réduite)):

> sI_A := s*IdentityMatrix(6)-Matrice_Evolution_Beta_réduite:
> factor(Determinant(sI_A)):

$$s^6 + 73.0134s^5 + 5578.68s^4 + 1.99465 \cdot 10^5 s^3 - 510.534 \mu s^2 - 12425.3 \mu^2 s + 5.04607 \cdot 10^6 s^2 - 8.00305 \cdot 10^5 \mu s^2 + 6.80052 \cdot 10^7 s - 9.77067 \cdot 10^6 \mu s + 2.56080 \cdot 10^6 \mu^2 s - 1.15155 \cdot 10^5 \mu^4 s + 3.39473 \cdot 10^8 s^8 - 8.99628 \cdot 10^7 \mu^4 s - 1.52934 \cdot 10^6 \mu^2$$

> Vecteur_Beta_Commande_thetal := algsubs(rho*a*c*R[otor]^4/I_beta=gamma,
simplify(subs(thetal=-18*deg2rad,
<0,0,0,map(diff,ftild_réduite,thetal)*thetal>))) :

> Matrice_Beta_Commandel := algsubs(rho*a*c*R[otor]^4/I_beta=gamma,
simplify(<<Matrix(3,3)>,<subs({cos(2*psi)=0,sin(2*psi)=0,cos(4*psi)=0,sin(4*psi)=0}, map(diff,ftild_réduite,theta0)) |
subs({cos(2*psi)=0,sin(2*psi)=0,cos(4*psi)=0,sin(4*psi)=0},
map(diff,ftild_réduite,A1[w])) |
subs({cos(2*psi)=0,sin(2*psi)=0,cos(4*psi)=0,sin(4*psi)=0},
map(diff,ftild_réduite,B1[w]))>>)):

> Commandel := <Matrice_Beta_Commandel[4..6,1..3]>:

> Commande_minus_one := Adjoint(Commandel)/Determinant(Commandel):

> factor(subs(rho=0.002377, a=5.73, c=1.73, R[otor]=26.83, Omega[motor]=27,
I_beta=1512.6, gamma=8.1936, epsilon=1.25/26.83, M_beta=86.7,
K_beta[spring]=0, delta3=0, mu=0, Determinant(<sI_A[1..6,1] |
Matrice_Beta_Commandel[1..6,3] | sI_A[1..6,3..6]>)/Determinant(sI_A))):

$$\frac{37814.2(s+12.1689)(s^2+24.3380s+781.231)}{(s^2+24.3376s+151.457)(s^2+24.3376s+781.241)(s^2+24.3382s+2869)}$$

> temp14 := subs(mu=V[Shaft/Wind][1]/(Omega[motor]*R[otor]),
{u[Body]=u[Body[E]],v[Body]=v[Body[E]],w[Body]=w[Body[E]],Dot[u][Body]=0,Dot[v][Body]=0, Dot[w][Body]=0,
p[Body]=p[Body[E]],q[Body]=q[Body[E]],r[Body]=r[Body[E]],Dot[p][Body]=0,
Dot[q][Body]=0, Dot[r][Body]=0},
Multiply(<s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),
Dot[u][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),u[Body]) |
s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),
Dot[v][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),v[Body]) |
s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),
Dot[w][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),w[Body]) >,
T[Body/Earth[E]])):

```



```

> temp15 := subs(mu=V[Shaft/Wind][1]/(Omega[motor]*R[otor]),
{u[Body]=u[Body[E]],v[Body]=v[Body[E]],w[Body]=w[Body[E]],Dot[u][Body]=0,Dot[
v][Body]=0, Dot[w][Body]=0,
p[Body]=p[Body[E]],q[Body]=q[Body[E]],r[Body]=r[Body[E]],Dot[p][Body]=0,
Dot[q][Body]=0, Dot[r][Body]=0},
s*Multiply(<s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite
), Dot[p][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),p[Body]) |
s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),
Dot[q][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),q[Body]) |
s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),
Dot[r][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),r[Body]) >,
T[Diff(omega,eta)[E]]):
> temp16 := subs(mu=V[Shaft/Wind][1]/(Omega[motor]*R[otor]),
{u[Body]=u[Body[E]],
v[Body]=v[Body[E]],w[Body]=w[Body[E]],Dot[u][Body]=0,Dot[v][Body]=0,
Dot[w][Body]=0,
p[Body]=p[Body[E]],q[Body]=q[Body[E]],r[Body]=r[Body[E]],Dot[p][Body]=0,
Dot[q][Body]=0, Dot[r][Body]=0},
Multiply(Matrix(map(diff,ftild_réduite,Gravity), shape=diagonal),
T[Diff(Gravity,eta)[E]]):
> temp17 := subs(mu=V[Shaft/Wind][1]/(Omega[motor]*R[otor]),
{u[Body]=u[Body[E]],
v[Body]=v[Body[E]],w[Body]=w[Body[E]],Dot[u][Body]=0,Dot[v][Body]=0,
Dot[w][Body]=0,
p[Body]=p[Body[E]],q[Body]=q[Body[E]],r[Body]=r[Body[E]],Dot[p][Body]=0,
Dot[q][Body]=0, Dot[r][Body]=0},
Multiply(<s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),
sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite), Dot[u][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta), sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),u[Body]) |
s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),
Dot[v][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),v[Body]) |
s*map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),
Dot[w][Body]) +
map(diff,subs(cosZeta=cos(Zeta),sinZeta=sin(Zeta),ftild_réduite),w[Body]) >,
Delta_T[Diff(V,eta)]):
> Matrice_Beta_Commande2 := subs(Omega[motor]=Omega[motor[E]],
<<Matrix(3,6)>>,<temp14 | temp15+temp16+temp17>>):
> Commande2 := simplify(subs({psi=Pi/2, a=5.73, rho=0.002336, c=1.73,
epsilon=1.25/26.83, N[Blades]=4, Omega[motor[E]]=2*Pi*263/60, R[otor]=26.83,
delta3=0*deg2rad, M_beta=86.7, I_beta=1512.6, K_beta[spring]=0,
Gravity=32.174, Phi[E]=-2.5675*deg2rad, Theta[E]=5.1168*deg2rad,
Psi[E]=0*deg2rad, u[Body[E]]=0.5*kt sec2ft, v[Body[E]]=0, w[Body[E]]=0,
p[Body[E]]=0, q[Body[E]]=0, r[Body[E]]=0}, Matrice_Beta_Commande2)):
> Matrice_Beta_Commande3 := simplify(<<Matrix(3,3)>>,
<subs({cos(2*psi)=0,sin(2*psi)=0,cos(4*psi)=0,sin(4*psi)=0},
map(diff,ftild_réduite,nu[0])) |
subs({cos(2*psi)=0,sin(2*psi)=0,cos(4*psi)=0,sin(4*psi)=0},
map(diff,ftild_réduite,nu[c])) |
subs({cos(2*psi)=0,sin(2*psi)=0,cos(4*psi)=0,sin(4*psi)=0},
map(diff,ftild_réduite,nu[s]))>>):
Approximation du mouvement de battement verticale des pales et du mouvement de traînée avec les harmoniques
du premier ordre
> beta_lin := a0 - a1*cos(psi) - b1*sin(psi):
> Upsilon_lin := Dot_a0 - (Dot_a1 + b1*Omega[motor])*cos(psi) - (Dot_b1-
a1*Omega[motor])*sin(psi):

```

```

> DotUpsilon_lin := DDot_a0 - (DDot_a1 + 2*Dot_b1*Omega[motor] -
a1*Omega[motor]^2)*cos(psi) - (DDot_b1 - 2*Dot_a1*Omega[motor] -
b1*Omega[motor]^2)*sin(psi);
> Vaéro_lin := subs({Upsilon=Upsilon_lin, beta=beta_lin,
DotUpsilon=DotUpsilon_lin}, Vaéro_simple);
> theta_lin := subs(beta=beta_lin, theta):
Expression de forces aérodynamique dans le repère moyeu-vent fixe
> dFaéro_lin := 1/2*rho*a*c*(Vaéro_lin[1]^2*theta_lin +
Vaéro_lin[1]*Vaéro_lin[3]);
> dDaéro_simple := 1/2*rho*c*C[drag]*Vaéro_simple[1]^2;
> Thrust := N[Blades]/(2*Pi)*int(int(dFaéro_lin, r[b]=0..(R[otor]-
epsilon*R[otor]))
+0*cos(psi)*(2*omega[Shaft/Wind][1]*Omega[motor]*(M_beta/Gravity+epsilon*R[ot
or]*W[eightBlade[MR]]) +M_beta*Dot[omega][Shaft/Wind][2]/Gravity)
+0*sin(psi)*(-
2*omega[Shaft/Wind][2]*Omega[motor]*(M_beta/Gravity+epsilon*R[otor]*W[eightBl
ade[MR]]) +M_beta*Dot[omega][Shaft/Wind][1]/Gravity), psi=0..2*Pi) -
N[Blades]*(DDot_a0*M_beta + W[eightBlade[MR]]*(Gravity-(A[hub][3] +
omega[Shaft][1]*V[hub][2] - omega[Shaft][2]*V[hub][1]))):
> thrust := N[Blades]/2*rho*a*c*R[otor]*(Omega[motor]*R[otor])^2*((1-
epsilon^2)/2*lambda[0]+mu*(1-epsilon)/2*lambda[s] + (1/3*(1-
epsilon^3)+mu^2/2*(1-epsilon))*theta0 + (1/4*(1-epsilon^4)+mu^2/4*(1-
epsilon^2))*theta1 - mu/2*(1-epsilon^2)*(Bl[w]-delta3*b1) - delta3*(1/3*(1-
epsilon^3)+mu^2/2*(1-epsilon))*a0 + (mu/2*epsilon*(1-epsilon))*a1 - (1/3-
epsilon/2+1/6*epsilon^3)*Dot_a0/Omega[motor] + (mu/4*(1-
epsilon)^2)*Dot_b1/Omega[motor] + mu/4*(1-
epsilon^2)*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]) - N[Blades]*(DDot_a0*M_beta +
W[eightBlade[MR]]*(Gravity-(A[hub][3] + omega[Shaft][1]*V[hub][2] -
omega[Shaft][2]*V[hub][1]))):

> simplify(Thrust - thrust);
0
> T[hurst_coefficient/sigma] :=
Thrust/(rho*N[Blades]*c[hordBlade[MR]]*R[otor]*(Omega[motor]*R[otor])^2):
> dFx_aéro_lin := 1/2*rho*a*c*(Vaéro_lin[1]*Vaéro_lin[3]*theta_lin +
Vaéro_lin[3]^2 - 1/2*rho*C[drag]*c*Vaéro_lin[1]^2);
> dFy_aéro_lin := -beta_lin*dFaéro_lin;
> Hforce_w :=N[Blades]/(2*Pi)*int(int(-
dFx_aéro_lin*sin(psi)+dFy_aéro_lin*cos(psi), r[b]=0..(R[otor]-
epsilon*R[otor])), psi=0..2*Pi):

> hforce_w :=
N[Blades]/2*rho*a*c*R[otor]*(Omega[motor]*R[otor])^2*(C[drag]*mu*(1-
epsilon^2)/(2*a) - (theta0-delta3*a0)/4*(2*mu*(1-epsilon)*lambda[0]+(1-
epsilon^2)*lambda[s]-mu*(1-epsilon)^2*Dot_a0/Omega[motor])+(2-
3*epsilon+epsilon^3)/3*Dot_b1/Omega[motor] - (4-3*epsilon-
epsilon^3)/3*a1+2*(1-epsilon^3)/3*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]) -
theta1/4*(mu*(1-epsilon^2)*lambda[0]+2/3*(1-epsilon^3)*lambda[s]-mu*(2-
3*epsilon+epsilon^3)/3*Dot_a0/Omega[motor] + (3-
4*epsilon+epsilon^4)/6*Dot_b1/Omega[motor] - (3-2*epsilon-epsilon^4)/3*a1+(1-
epsilon^4)/2*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]) + (A1[w]-
delta3*a1)/4*(mu/4*(1-epsilon)^2*Dot_a1/Omega[motor]+mu/2*(1-
epsilon)*lambda[c]+2*(1-epsilon^3)/3*a0 -mu*(epsilon-epsilon^2)/2*b1+mu*(1-
epsilon^2)/4*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]) + (Bl[w]-delta3*b1)/4*(-(2-
3*epsilon+epsilon^3)/3*Dot_a0/Omega[motor] +mu*3*(1-
epsilon)^2/4*Dot_b1/Omega[motor]-mu*(2-3*epsilon+epsilon^2)/2*a1+(1-
epsilon^2)*lambda[0]+3/2*mu*(1-epsilon)*lambda[s] +mu*3*(1-
epsilon^2)/4*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor])-lambda[0]*(1-

```

```

epsilon)^2/2*Dot_b1/Omega[motor] +lambda[0]*(3-4*epsilon+epsilon^2)/4*a1 -
((1-epsilon^2)/2*lambda[0]-(2-
3*epsilon+epsilon^3)/6*Dot_a0/Omega[motor]+mu*(1-
epsilon^2)/16*a1)*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor] -((1-
epsilon^3)/6*a0+mu*(1-epsilon^2)/16*b1)*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]
+mu*(-(1-epsilon)^2/16*(b1*Dot_a1/Omega[motor]+a1*Dot_b1/Omega[motor]))+(1-
epsilon^2)/4*a0^2 +(2-epsilon-epsilon^2)/8*a1^2+(epsilon-epsilon^2)/8*b1^2) -
(2-
3*epsilon+epsilon^3)/12*(a1*Dot_a0/Omega[motor]+a0*(Dot_a1/Omega[motor]+b1))
+(2-6*epsilon+6*epsilon^2-2*epsilon^3)/6*(Dot_b1/Omega[motor]-
a1)*Dot_a0/Omega[motor]-lambda[0]*lambda[s]*(1-epsilon) - lambda[c]/4*(1-
epsilon^2)*a0-lambda[c]*mu/8*(1-epsilon)*b1+lambda[s]/2*(1-
epsilon)^2*Dot_a0/Omega[motor]-lambda[s]*mu/8*(1-epsilon)*a1):
> simplify(Hforce_w - hforce_w);
0
> Yforce_w := -N[Blades]/(2*Pi)*int(int(-dFx_aero_lin*cos(psi)-
dFy_aero_lin*sin(psi), r[b]=0..(R[otor]-epsilon*R[otor])), psi=0..2*Pi):
> yforce_w := N[Blades]/2*rho*a*c*R[otor]*(Omega[motor]*R[otor])^2*((theta0-
delta3*a0)*((2-3*epsilon+epsilon^3)/12*Dot_a1/Omega[motor] -3*mu*(1-
epsilon^2)/4*a0 +((4-3*epsilon-epsilon^3)/12+mu^2*(1-epsilon)/2)*b1+(1-
epsilon^2)/4*lambda[c] +(1-
epsilon^3)/6*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor])+thetal*((3-
4*epsilon+epsilon^4)/24*Dot_a1/Omega[motor] -mu*(1-epsilon^3)/2*a0+((3-
2*epsilon-epsilon^4)/12+mu^2*(1-epsilon^2)/4)*b1+(1-epsilon^3)/6*lambda[c]
+(1-epsilon^4)/8*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]) +(A1[w]-delta3*a1)/4*((2-
3*epsilon+epsilon^3)/3*Dot_a0/Omega[motor]- (1-epsilon^2)*lambda[0]-mu*(1-
epsilon)/2*lambda[s] -mu*((1-epsilon)^2/4*Dot_b1/Omega[motor]+(2+epsilon-
3*epsilon^2)/2*a1 +(1-epsilon^2)/4*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]))
+(B1[w]-delta3*b1)*((1-epsilon^3)/6+mu^2*(1-epsilon)/2)*a0 +mu*(-(1-
epsilon)^2/16*Dot_a1/Omega[motor]-(4-epsilon-3*epsilon^2)/8*b1-(1-
epsilon)/8*lambda[c] - (1-epsilon^2)/16*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]))+(-
(1-epsilon^3)/6*a0+5*mu*(1-
epsilon^2)/16*b1)*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor] +(- (2-
3*epsilon+epsilon^3)/6*Dot_a0/Omega[motor] +mu*7*(1-epsilon^2)/16*a1+(1-
epsilon^2)/2*lambda[0])*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]- (1-3*epsilon
+3*epsilon^2-epsilon^3)/3*Dot_a0/Omega[motor]*Dot_a1/Omega[motor] - (2-
5*epsilon+4*epsilon^2-epsilon^3)/4*Dot_a0/Omega[motor]*b1 +lambda[0]*((1-
epsilon)^2/2*Dot_a1/Omega[motor]+(3-4*epsilon+epsilon^2)/4*b1) - (2-
3*epsilon+epsilon^3)/12*Dot_b1/Omega[motor]*a0+(2-
3*epsilon+epsilon^3)/12*a0*a1+mu*(3*a0*(1-epsilon)^2/4*Dot_a0/Omega[motor]
+7*a1*(1-epsilon)^2/16*Dot_a1/Omega[motor]+5*b1*(1-
epsilon)^2/16*Dot_b1/Omega[motor]-3*lambda[0]*(1-epsilon)/2*a0 -mu*(1-
epsilon)*a0*a1+(1-epsilon)/4*a1*b1)-(1-
epsilon)^2/2*Dot_a0/Omega[motor]*lambda[c]-(1-epsilon^2)/4*a0*lambda[s] +
7*mu*(1-epsilon)/8*a1*lambda[c]+5*mu*(1-epsilon)/8*b1*lambda[s]+(1-
epsilon)*lambda[0]*lambda[c]):
> simplify(Yforce_w - yforce_w);
0
> Hforce_h := Hforce_w*cosZeta + Yforce_w*sinZeta:
> Yforce_h := -Hforce_w*sinZeta + Yforce_w*cosZeta:
> Rotor_force_vector_b := subs({cosZeta=cos(Zeta), sinZeta=sin(Zeta)},
Multiply(Transpose(Rot[Shaft/Body]), <-Hforce_h, Yforce_h, -Thrust>)):

> # Mx_moment_w := simplify(N[Blades]/(2*Pi)*int(int(-
dFaero_lin*r[b]*sin(psi), r[b]=0..(R[otor]-epsilon*R[otor])), psi=0..2*Pi))
+N[Blades]/2*(K_beta[spring]*b1-epsilon*M_beta/Gravity*(DDot_b1 -
2*Dot_a1*Omega[motor] - b1*Omega[motor]^2)):

```

```

> # My_moment_w := -
simplify(N[Blades]/(2*Pi)*int(int(dFaéro_lin*r[b]*cos(psi), r[b]=0..(R[otor]-
epsilon*R[otor])), psi=0..2*Pi)) + N[Blades]/2*(K_beta[spring]*a1-
epsilon*M_beta/Gravity*(DDot_a1 + 2*Dot_b1*Omega[motor] -
a1*Omega[motor]^2)):
> mx_moment_w := N[Blades]/2*(K_beta[spring]*b1-
epsilon*M_beta/Gravity*(DDot_b1 - 2*Dot_a1*Omega[motor] - b1*Omega[motor]^2))
- N[Blades]/2*rho*a*c*R[otor]^2*(Omega[motor]*R[otor])^2*epsilon*(mu/2*(1-
epsilon^2)*(theta0-delta3*a0) - ((1-epsilon^3)/6+3/8*mu^2*(1-epsilon))*(B1[w]-
delta3*b1)+mu/3*(1-epsilon^3)*theta1 - mu/4*(1-epsilon)^2*Dot_a0/Omega[motor]
+(1/6-epsilon/4+epsilon^3/12)*(Dot_b1/Omega[motor]-a1) +mu^2/8*(1-
epsilon)*a1+mu/2*(1-epsilon)*lambda[0]+(1-epsilon^2)/4*lambda[s] + (1-
epsilon^3)/6*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]):
> # factor(Mx_moment_w - mx_moment_w);
> my_moment_w := N[Blades]/2*(K_beta[spring]*a1-
epsilon*M_beta/Gravity*(DDot_a1 + 2*Dot_b1*Omega[motor] - a1*Omega[motor]^2))
- N[Blades]/2*rho*a*c*R[otor]^2*(Omega[motor]*R[otor])^2*epsilon*(-(1/6*(1-
epsilon^3)+mu^2*(1-epsilon)/8)*(A1[w]-delta3*a1) - mu/4*(1-epsilon^2)*a0
+(1/6-epsilon/4+epsilon^3/12)*(Dot_a1/Omega[motor]+b1) +mu^2/8*(1-
epsilon)*b1+(1-epsilon^2)/4*lambda[s]+(1-
epsilon^3)/6*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]):
> # factor(My_moment_w - my_moment_w);
> q_moment := -simplify(N[Blades]/(2*Pi)*int(int(dFx_aéro_lin*r[b],
r[b]=0..(R[otor]-epsilon*R[otor])), psi=0..2*Pi)):
> q_moment :=
N[Blades]/2*rho*a*c*R[otor]^2*(Omega[motor]*R[otor])^2*(C[drag]/(4*a)*(1-
4/3*epsilon+epsilon^4/3+mu^2*(1-epsilon)^2) - (theta0-delta3*a0)*((2-
3*epsilon+epsilon^3)*lambda[0]/6 + mu/4*(1-epsilon)^2*lambda[s] - 1/12*(3-
8*epsilon+6*epsilon^2-epsilon^4)*Dot_a0/Omega[motor] + mu/6*(1-
epsilon)^3*Dot_b1/Omega[motor]+mu/4*epsilon*(1-epsilon)^2*a1 + mu/12*(2-
3*epsilon+epsilon^3)*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]) + (A1[w]-
delta3*a1)*(1/24*(3-8*epsilon+6*epsilon^2-epsilon^4)*Dot_a1/Omega[motor]-
mu/12*(2-3*epsilon+epsilon^3)*a0 + (1/24*(3-8*epsilon+6*epsilon^2-
epsilon^4)+1/16*(1-epsilon)^2*mu^2)*b1 + (2+epsilon)/12*(1-
epsilon)^2*lambda[c] +1/24*(3-
4*epsilon+epsilon^4)*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]) + (B1[w]-delta3*b1)*(-
mu/6*(1-epsilon)^3*Dot_a0/Omega[motor] + 1/24*(3-8*epsilon+6*epsilon^2-
epsilon^4)*Dot_b1/Omega[motor] + (1/24*(epsilon^4+6*epsilon-6*epsilon^2-
3)+mu^2/16*(1-epsilon)^2)*a1 + 1/4*mu*(1-
epsilon)^2*lambda[0]+(2+epsilon)/12*(1-epsilon)^2*lambda[s]+1/24*(3-
4*epsilon+epsilon^4)*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]) + theta1*(1/30*(6-
15*epsilon+10*epsilon^2-epsilon^5)*Dot_a0/Omega[motor] - mu/24*(3-
8*epsilon+6*epsilon^2-epsilon^4)*Dot_b1/Omega[motor] - mu*epsilon*(2-
3*epsilon+epsilon^3)*a1/12 - (3-4*epsilon+epsilon^4)*lambda[0]/12 -
mu/12*(2+epsilon)*(1-epsilon)^2*lambda[s] - mu/24*(3-
4*epsilon+epsilon^4)*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]) - (1-
4*epsilon+6*epsilon^2-4*epsilon^3+epsilon^4)/8*(2*(Dot_a0/Omega[motor])^2 +
(Dot_a1/Omega[motor]+b1)^2 + (Dot_b1/Omega[motor]-a1)^2) - mu^2/16*(1-
epsilon)^2*(4*a0^2+b1^2+3*a1^2) + (2*lambda[0]+mu*a1)/3*(1-
epsilon)^3*Dot_a0/Omega[motor] + mu/3*(1-epsilon)^3*a0*Dot_a1/Omega[motor] -
(3-8*epsilon+6*epsilon^2-
epsilon^4)/12*(Dot_a1/Omega[motor]*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor] +
Dot_b1/Omega[motor]*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor] -
a1*omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor]+b1*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]) -
1/2*(1-epsilon)^2*(lambda[0]^2+mu*lambda[0]*a1) + mu/3*(1-epsilon)^3*a0*b1 +
mu*(1/3-1/2*epsilon+1/6*epsilon^3)*a0*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor] -
(1/8-
1/6*epsilon+1/24*epsilon^4)*((omega[Shaft/Wind][1]/Omega[motor])^2+(omega[Sha
ft/Wind][2]/Omega[motor])^2) - (1-

```

```

epsilon)^3/3*(lambda[c]*Dot_a1/Omega[motor]+lambda[s]*Dot_b1/Omega[motor]) +
mu/2*(1-epsilon)^2*a0*lambda[c] +(1-epsilon)^3*(a1*lambda[s]-b1*lambda[c])/3
- (1-epsilon)^2*(lambda[c]^2+lambda[s]^2)/4 - (2+epsilon)/6*(1-
epsilon)^2*(lambda[c]*omega[Shaft/Wind][2]/Omega[motor]+lambda[s]*omega[Shaft
/Wind][1]/Omega[motor])):
> simplify(Q_moment-q_moment);
0

> # Mx_moment_h := Mx_moment_w*cosZeta + My_moment_w*sinZeta:
> # My_moment_h := -Mx_moment_w*sinZeta + My_moment_w*cosZeta:
> # XYZ_moment_b := Multiply(Transpose(Rot[Shaft/Body]), <Mx_moment_h,
My_moment_h, Q_moment>):
> mx_moment_h := mx_moment_w*cosZeta + my_moment_w*sinZeta:
> my_moment_h := -mx_moment_w*sinZeta + my_moment_w*cosZeta:
> Rotor_moment_vector_h := subs({cosZeta=cos(Zeta), sinZeta=sin(Zeta)},
<mx_moment_h, my_moment_h, Q_moment>):
> R[otor_moment_coefficient_h/sigma] :=
Rotor_moment_vector_h/(rho*N[Blades]*c[hordBlade[MR]]*R[otor]^2*(Omega[motor]
*R[otor])^2):
> Rotor_moment_vector_b := subs({cosZeta=cos(Zeta), sinZeta=sin(Zeta)},
Multiply(Transpose(Rot[Shaft/Body]), Rotor_moment_vector_h) +
<l[h[x]],l[h[y]],l[h[z]]> &x Rotor_force_vector_b ):
> R[otor_moment_coefficient_b/sigma] :=
Rotor_moment_vector_b/(rho*N[Blades]*c[hordBlade[MR]]*R[otor]^2*(Omega[motor]
*R[otor])^2):

```

Le script suivant nous permet de calculer du modèle atmosphérique, ainsi que certains paramètres du régime de vol, en utilisant le logiciel MATLAB.

```
% Air parameters as function of altitude
% V          % ft/s    body center velocity vector (3x1)
% h          % ft      altitude above sea level
% Conversion terms
in2m = 2.54e-02;
ft2m = .3048;
slug2kg = 14.59;
lb2kg = .4536;
newton2pound = .2248;
pascal2poundfft2 = 2.089e-02;
rad2deg = 180/pi;
mps2knots = 3600/1852;
fps2knots = .591715;
% Initial data
g0 = 9.80665; % m/s^2 acceleration of gravity at sea level
T0 = 288.15; % K air temperature at sea level
p0 = 101325; % N/m^2 air pressure at sea level (Pa)
rho0 = 1.2251; % kg/m^3 air density at sea level
Rho0 = .002378; % slug/ft^3
a0 = 340.29; % m/s speed of sound
R = 287.039; % J/K/kg specific gas constant
Re = 6371210; % m radius of Earth
T_rate = -0.00651122; % Temperature gradient
%
H = h*ft2m;
g = g0*(Re/(Re+H))^2; % Acceleration of gravity
Ge_imp = g*ft2m;
f = H*Re/(Re+H); % Geopotential altitude
%
% Molecular temperature and static air pressure
Tm = T0 + T_rate*f;
p = exp(log(p0) - log(Tm/T0)*g0/(T_rate*R));
q_imp_sta = p*pascal2poundfft2; % pound force/ft^2
% Air density
rho = p/(R*Tm); % kg/m^3
rho_imp = rho*Rho0/rho0; % slug/ft^3
% Air speed
a = sqrt(1.4*R*Tm); % m/s
a_imp = a*ft2m; % ft/s
% Mach number
Mach = sqrt(V'*V)/a_imp;
% Vertical plane velocity and indicated Vx body center velocity
V_knots = fps2knots*sqrt(V(1)^2+V(3)^2); % knots
Vxbikt = fps2knots*V(1)*sqrt(rho_imp/Rho0); % knots
% Dynamic air pressure
q_imp_dyn = 1/2*rho_imp*V'*V; % lb/ft^2
% Free stream variables
Alpha_Deg = rad2deg*atan(V(3)/V(1)); % deg
Beta_Deg = rad2deg*atan(V(2)/sqrt(V(1)^2+V(3)^2)); % deg
```

Le script suivant nous permet de calculer le régulateur statique de retour de sortie par la méthode linéaire quadratique et H_∞ , en utilisant le logiciel MATLAB.

```
function [F,K] = OPFB_Hinf(Plant,q,r, Bpert,gamma)
%
% Extract system data
% Check dimensions and symmetry
if Nx~=size(b,1),
    error('The A and B matrices must have the same number of
rows.')
elseif any(size(q)~=Nx)
    error('The A and Q matrices must be the same size.')
elseif any(size(r)~=Nu),
    error('The R matrix must be square with as many columns as B.')
elseif ~isreal(q) || ~isreal(r)
    error('The weight matrices Q, R, N must be real valued.')
elseif norm(q'-q,1) > 100*eps*norm(q,1),
    warning('Q is not symmetric and has been replaced by
(Q+Q')/2).')
elseif norm(r'-r,1) > 100*eps*norm(r,1),
    warning('R is not symmetric and has been replaced by
(R+R')/2).')
end

% Enforce symmetry and check positivity
q = (q+q')/2;
r = (r+r')/2;

vr = eig(r);
vqnr = eig( blkdiag(q,r) );

if min(vr)<=0,
    error('The R matrix must be positive definite.')
elseif min(vqnr)<-1e2*eps*max(0,max(vqnr)),
    warning('The matrix [Q 0;0' R] should be positive semi-
definite.')
end

% Calcul de c(pseudo_inverse) = Cplus
[U,S,V] = svd(c);
V1 = V(:,1:size(U,2));
V2 = V(:, (size(V,2)-size(U,2)):size(V,2) );
%
Sp = zeros(size(U));
for i=1:size(U,2)
    Sp(i,i) = 1/S(i,i);
end
Cplus = V1*Sp*U';

% Initialisation
```

```

L = zeros(Nu,Nx); K = lqr(a,b,q,r);
%
iter = 1; maxit = 10;
% Créer le titre du tableau
disp(' ');
disp(' Algorithme pour calculer H_inf avec compensation statique
en retour');
disp(' ');
disp(' k DeltaK norme');
% Boucle principale
while iter<=maxit
P = care(a, b*inv(r)*b'-1/gamma^2*Bpert*Bpert', q+L'*inv(r)*L);
% Update le gain de retour K;
% Update le gain de retour K;
Kn = r\((b'*P+L)*( eye( size(V2*V2')) - V2*V2'));
% Update la matrice des multiplicateurs de Lagrange L
L = r*K - b'*P;
differ = norm(K)-norm(Kn);

if abs(differ) < 1.e-5
disp('La valeur optimale est trouvée'),break;
end

% Remplir le tableau
tab = sprintf('%3d',iter);
tab = [tab, sprintf(' %12.5e',norm(K-Kn))];
disp(tab);

K = Kn;
iter = iter + 1;
end; % Fin.
F = K*Cplus;

```

Le script suivant nous permet de mettre la dynamique de l'hélicoptère sous la forme standard selon la figure 3.6. Le script utilise le logiciel MATLAB.

```

% Generate the open-loop connection for the
% UH60A + [uB_gust;vB_gust;wB_gust] helicopter system
%
mod_UH60A
%
Ytild = [0,0,1,zeros(1,6); 0,1,0,1,zeros(1,5); ...
1,0,0,0,1,zeros(1,4);zeros(1,8),1;...
zeros(1,6),1,0,0;zeros(1,7),1,0];
PGust = ss(UH60AControl.a.n, [[UH60A_gust.b.n(:,1:3);zeros(4,3)],
... UH60AControl.b.n], UH60AControl.c.n, zeros(9,7));

```



```

% Fonctions de pondération
s = tf('s');
We = append((s/2.2+3.5)/(s+3.5*.16), (s/1.12+2.5)/(s+2.5*0.0005),
...
(s/1.12+2.5)/(s+2.5*0.001), (s/2.2+5)/(s+5*0.43),...
2*s/((s+4)*(s+4.5)), 2*s/((s+4)*(s+4.5)));
Wu = [100*(s+1e-4)/(s+10), 0, 0, 0; 0, 4*(s+1e-4)/(s+10), 0, 0;...
0, 0, 9.2*(s+1e-4)/(s+10), 0; 0, 0, 0, 4.6*(s+1e-4)/(s+10)];
Wr = blkdiag(.277,.419,.2600,.4201,.05,.05);
Wg = .1*eye(3);
%
% open-loop connection with the weighting function
systemnames = ' PGust Ytild We Wu Wr Wg';
inputvar = '[ ref{6} ; Gust{3}; Control{4} ]';
outputvar = '[ PGust; We; -Wu ; Wr - Ytild]';
input_to_PGust = '[ Wg; Control ]';
input_to_Ytild = '[ PGust ]';
input_to_We = '[ Wr - Ytild ]';
input_to_Wu = '[ Control ]';
input_to_Wr = '[ ref ]';
input_to_Wg = '[ Gust ]';
sysoutname = 'sys_ic';
cleanup_sysic = 'yes';
Taugw = sysic;
[NMEAS,NCON] = size(PGust);

```

Pour le système présenté à la figure 3.7, le script suivant calcule le compensateur et la marge de stabilité γ^* .

```

%% H_infinity loop-shaping design procedure
%% for the helicopter stabilization system
% Finds the controller which optimally robustifies a given
% shaped plant in terms of tolerating maximum coprime uncertainty.
% Used in the McFarlane-Glover H-infinity loopshaping procedure.
%
%%
% La conception du contrôleur selon la méthode de « loop-shaping »
% consiste:
% 1) à augmenter le système avec matrices de pondération W1(s) et
% W2(s)
% pour but de façonner les valeurs singulières de la matrice de
% transfert en boucle ouverte.
% La matrice de pondération W1(s) introduit une action
intégrale et
% assure un taux de décroissance des valeurs singulières du
système
% pondéré, en boucle ouverte, dans l'environ de la fréquence de
coupure
% désirée. La matrice de pondération W2(s) pénalise la réponse
% fréquentielle en haute fréquence, force (à élargir) la bande
passante
% du système en boucle fermée et/ou favorise certaines
variables par
% rapport aux autres. La matrice k est utilisée pour ajuster
les
% signaux de commande des actionneurs pour respecter les
limites de
% déplacement et/ou taux de variation.

%% Structure of the H_infinity loop-shaping controller Kinf(s)
%
%
%      +
%      |
% Zc -->[ Kinf(0)*W2(0) ]-->O-->[ k ]-->[ W1(s) ]->[ G(s) ]-->Z
%      |
%      + ^
%      |
%      +---[ Kinf(s) ]<---[ W2(s) ]<---+
%
% Gs = W2*G*W1 is called the 'shaped plant'. /système pondéré/
%
% 2) à ajuster les matrices de pondération W1(s),W2(s) et k pour
optimiser
% la structure du contrôleur qui stabilise robustement le
système
% factorisé en éléments premiers (FEP), en présence de
perturbations
% stables sur chaque des facteurs.
%

```

```

% Voir chapitre 4 du « Robust Multivariable Control of Aerospace
Systems »
% Declan Bates et Ian Postlethwaite, DUP Sciences 2002
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Generates the open-loop connection for the
% helicopter stabilization system
mod_UH60A
C_tild6 = [0,0,1,zeros(1,6); 0,1,0,1,zeros(1,5); ...
           1,0,0,0,1,zeros(1,4);zeros(1,8),1;...
           zeros(1,6),1,0,0;zeros(1,7),1,0];
s = tf('s');
%
W1_ls = append(tf([1 9],[1 0]),tf([1 17],[1 0]),...
               tf([1 2],[1 0]),tf([1 1],[1 0]));
k_ls = diag([.1,.1,.1,.1]);
W2_ls = diag([.8,1,1,1,.1,.5]);
%
Gshape = W2_ls*C_tild6*UH60AControl.nom*W1_ls*k_ls;
%
[Ac_inf,Bc_inf,Cc_inf,Dc_inf,gammin] =
coprimeunc(Gshape.a,Gshape.b,Gshape.c,Gshape.d)
Ks_inf = ss(Ac_inf, -Bc_inf, Cc_inf, -Dc_inf);

```